目　　录

前言
一、枚举法 ……………………………………………1
二、乘法原理与分步法 ……………………………6
三、配对法……………………………………………14
四、加法原理与分组法……………………………22
五、容斥原理…………………………………………30
六、折线法与反射原理……………………………40
七、抽屉原理与重迭原理…………………………49
八、最小数原理………………………………………59
九、递推、迭代、归纳……………………………69
十、递推方程…………………………………………81
十一、母函数…………………………………………95
十二、其他 ……………………………………………109
练习题解答概要 ……………………………………116

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

一、枚 举 法

枚举法是最简单，也是最原始的计数方法.

老奶奶数鸡蛋，她小心翼翼地从篮子里往外拿鸡蛋，一个一个地拿，篮子里的鸡蛋拿光了，有多少个鸡蛋也就数出来了. 从老奶奶的这种数鸡蛋的个数的方法中引伸出来的就是枚举法. 所谓枚举法，就是把集合 A 的元素一一列举出来，不遗漏，不重复，从而计算出 A 的元素的个数.

[例 1] 4 个球，编号为 1，2，3，4. 把它们分放进编号 1，2，3，4 的 4 只箱里，每箱放一球. 问至少有一箱恰使球号与箱号相同的放法有几种.

解 4 球分放 4 箱，第 1，2，3，4 箱依次放进第 a_1, a_2, a_3, a_4 号球，这种放法用 (a_1, a_2, a_3, a_4) 表示. (a_1, a_2, a_3, a_4) 中的数字 1，2，3，4 的顺序不同，所表示的放球方法也不同. 所以 (a_1, a_2, a_3, a_4) 称为 4 元有序数组. 下面把至少有一箱，球箱同号的放法一一枚举于后. 恰有 4 箱，球箱同号：(1，2，3，4)；恰有 2 箱，球箱同号：(1，2，4，3)，(1，4，3，2)，(1，3，2，4)，(4，2，3，1)，(3，2，1，4)，(2，1，3，4)；恰有 1 箱，球箱同号：(1，4，2，3)，(4，2，1，3)，(4，1，3，2)，(1，3，4，2)，(3，2，4，1)，(2，4，3，1)，(3，1，2，4)，(2，3，1，4). 共有 15 种放法. □

球箱同号可用"耦合"一词表达. 上例为 4 球 4 箱的耦合问题. 反之，球与箱都不同号，则称为错位问题.

有序数组是数学中的一个重要概念. 设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

中的每一个 a_k 都是实数($k=1, 2, \cdots, n$),如果对任意的 k,都有 $a_k=b_k$,则认为 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 等同于 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$;否则,如果有某个 k,使得 $a_k\neq b_k$,则认为 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 不同于 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,我们把这样的一组数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 叫做 n **元有序数组**. 在平面上建立直角坐标系后,平面上的点就可以用二元有序数组 (x, y) 表示;在空间中建立直角坐标系后,空间中的点就可以用三元有序数组 (x, y, z) 表示;一般地,常用 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维欧氏空间中的点.

枚举计数的关键是把集合里的元素一一列举,既不遗漏又不重复. 在例 1,为了做到这一点,按球与箱同号的箱数为 4, 2, 1 逐类枚举. 但是,如果是 n 球 n 箱且 n 很大,即使按球箱同号的箱数逐类枚举,也很难做到不遗漏、不重复. 因此,在用枚举法时也有所讲究:先观察有什么规律可寻,再按这规律采取适用的技巧.

[**例 2**] 从 1 到 10^6,有多少个整数 n,使 2^n-n^2 能被 7 整除?

解 2^n-n^2 能被 7 整除,必须而且只须 2^n 与 n^2 被 7 除的余数相同. 为了找出使 2^n-n^2 能被 7 整除的整数 n,可取 $n=1, 2, 3, \cdots, 10^6$,一一验算 2^n 与 n^2 被 7 除的余数是否相同. 列出下面的余数表.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	……
2^n(mod7)	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	……
n^2(mod7)	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	……

表中符号 a(mod b) 表示整数 a 除以 b 的余数. 从上表可以看到,2^n(mod 7) 那一行,2, 4, 1 三个数循环出现;n^2(mod 7) 那一行,1, 4, 2, 2, 4, 1, 0 七个数循环出现. 是否当 n 每增

3，即变为 $n+3$ 时，2^{n+3} 与 2^n 被 7 除，余数相同？是否 $(n+7)^2$ 与 n^2 被 7 除，余数相同？答案是肯定的，可以证明如下：

$$2^{n+3}-2^n=(2^3-1)2^n=7\cdot 2^n,$$

$$(n+7)^2-n^2=7(2n+7).$$

注意 3 和 7 的最小公倍数是 21，所以当 n 由 22 到 42 取值时，2^n 与 n^2 的余数表恰是 n 从 1 至 21 取值时相应的余数表。因此只要弄清 1 到 21 有几个 n 使 2^n 与 n^2 被 7 除余数相同，以及 1 到 10^6 按 21 个数为一段可分为几段，问题就解决了。

从表中可以看出，从 1 到 21，只有当 n 为 2, 4, 5, 6, 10, 15 时，2^n-n^2 能被 7 整除。而 $10^6\div 21$ 的不完全商为 47619，即循环次数为 47619，余数为 1. 但 2^1-1^2 不能被 7 整除。所以从 1 到 10^6 共有 $6\times 47619=285714$ 个整数 n，使得 2^n-n^2 被 7 整除。 □

在例 2 中，先找出 $2^n \pmod 7$ 与 $n^2 \pmod 7$ 的周期性规律，再根据这一规律，只要枚举一个局部（n 自 1 至 21），对整体（n 自 1 到 10^6）的情况就完全清楚了。**由于能以局部概括整体，从而使枚举的工作量大为减少。**

［例 3］ 设 n 为不小于 3 的整数，以 $f(n)$ 记三边长 a、b、c 都是正整数且满足 $a<b<c=n$ 的三角形的个数，求 $f(20)$ 与 $f(21)$.

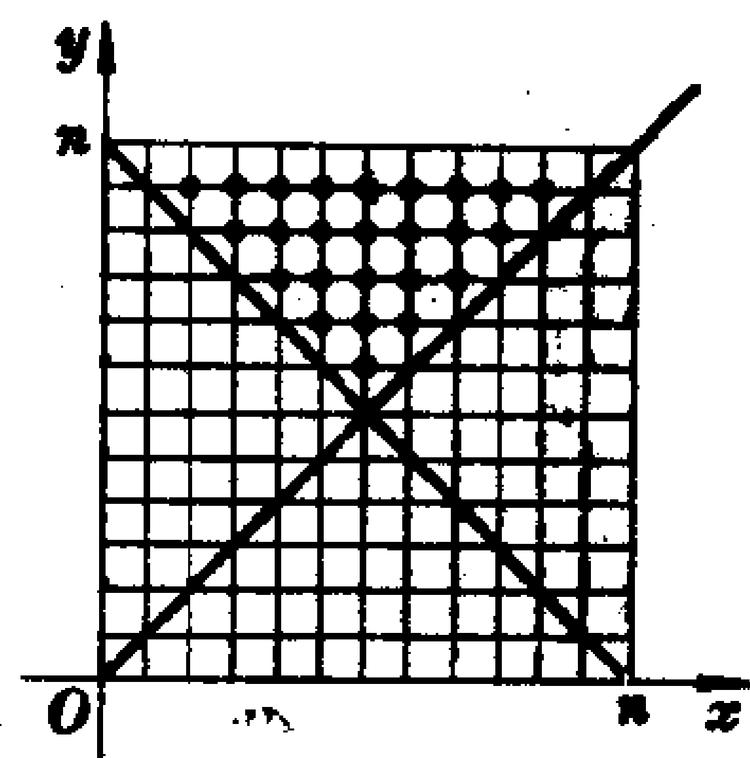


图 1-1

解 下面借助图形找出规律。因为边长为 a、b、c 的三角形有一边 $c=n$ 是固定的，所以可以让这种三角形对应坐标平面上的一个格点 (a, b)（即 a、b 都是整数的点）。因为 $a<b$，所以格点 (a, b) 位于直线 $x=y$ 的上半平面；因 a、b、n 是三角形的三边长，所以 $a+b>n$，表明格点 (a, b) 位于直线 $x+y=n$

的上半平面；因 $a<b<n$，表明格点 (a, b) 位于直线 $y=n$ 的下半平面．总之，格点 (a, b) 落在由三条直线 $x=y$、$x+y=n$ 及 $y=n$ 围成的三角形区域 $\mathscr{D}$ 的内部(图 1-1，不包括边界)．反之，容易证明，$\mathscr{D}$ 内部任一格点 (a, b) 即可确定一个满足题设的三角形，其三边长为 a、b、n．为求 $f(n)$，只要数出 $\mathscr{D}$ 内的格点数目．由图中不难看出，当 $n=20$ 时，$\mathscr{D}$ 内格点自下而上成等差点列：$1+3+5+\cdots+15+17$，故 $f(20)=9^2=81$；当 $n=21$ 时，$\mathscr{D}$ 内格点自下而上成等差点列：$2+4+6+\cdots+16+18$，故 $f(21)=9\times10=90$．一般地，有

$$f(2k)=1+3+5+\cdots+(2k-3)=(k-1)^2,$$

$$f(2k+1)=2+4+6+\cdots+2(k-1)=k(k-1).$$ □

在例 3 中，先把计算符合题设的三角形的个数问题归结为计算平面区域 $\mathscr{D}$ 内格点个数的问题，这给枚举提供了很大的方便；然后，从图中寻找 $\mathscr{D}$ 内格点的分布规律：自下而上组成等差点列，这又使得计算变得非常简单．

[例 4]　有一青年在三个城市 a、b、c 游览：他今天在这个城市，明天就到另一个城市．求这位青年从 a 城出发，经 4 天后仍回到 a 城的旅行路线的种数．

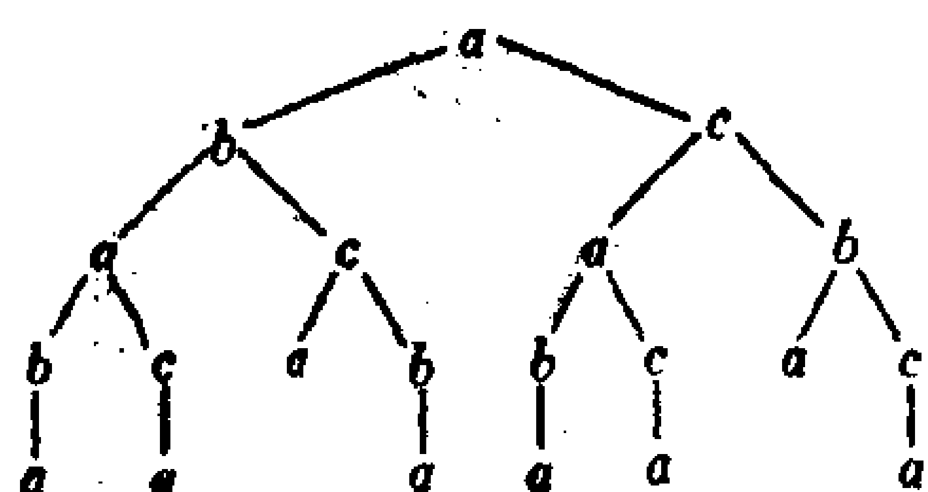


图 1-2

解　这位青年自城 a 经过 4 天后仍回到城 a 的各种旅行路线由图 1-2 给出．从图中一目了然，共有 6 种路线．□

例 4 与概率论中的随机游动问题有关．图 1-2 称为树形图，因为倒过来看很象一棵树．树是图论中常见的一种图．利用树形图计数，十分形象，是一种常用的方法．

上面数例介绍了几种枚举方式．采用枚举法计数时，应注

意做到既不疏漏又不重复. 因此，当要计数的东西甚多且又没有可以利用的规律时，应当寻求别的方法.

练 习 一

1. 4本不同的书分给3人，每人至少1本，有几种分法?如果4本书相同，有几种分法?

2. 用0, 1, 2, 3四个数字，不许重复，能写成多少个三位数?

3. 2×2棋盘的4个方格用两种颜色填色，每格一色，有多少种填色法?

4. 设n是正整数. 求三边长a、b、c都是整数且$a\leqslant b\leqslant c=n$的三角形的个数.

5. 从1至1000的整数中取两个，组成有序对(x, y)，x与y可以相同. 求x^2+y^2被7整除的有序对(x, y)的个数.

6. 设4个数字皆不为0且互不相同的四位数$a_1a_2a_3a_4$能被11整除，证明：把这4个数字重新排列，至少还能排出7个能被11整除的四位数.

7. 对正三角形的三边，正方形的四边，用3种颜色染色，有多少种染色方法?这里，凡经过旋转、翻转可以相合(意指重迭的边染同种颜色)的，看作是相同的染色法.

8. 在3×3棋盘的9个编了号的方格中，用黄、红、绿三色填色，每种颜色填3格，求每行每列都有三色的填色方法数目.

9. 1至10^6中，有多少个整数n使得n^3的个位数等于1?有多少个整数n使得n^4的个位数等于1?

10. 在3×4棋盘上，用6张1×2长方条覆盖，不考虑棋盘的旋转，有多少种方法可以把这个棋盘完全覆盖?

11. 从正十七边形的顶点中取3点作三角形，并使得正十七边形的中心落在三角形内，这样的三角形有多少个?

12. 用1, 2, 3, 4, 5五个数字，不许重复，能写成多少个3的倍数?

13. 设整数$n\geqslant3$. 求$x+y+z=n$的正整数解(x, y, z)的组数.

14. 甲、乙两人打乒乓球，谁先连胜头两局谁赢；如果没有人连胜头两局，则谁先胜三局谁赢，打到决出输赢为止. 问有多少种可能情况?

二、乘法原理与分步法

从 a 城到 b 城有 3 条路，从 b 城到 c 城有 4 条路，要从 a 城经 b 城到 c 城，有几种走法？从图 2-1 可以数出，有 $3\times4=12$ 种走法. 这 12 条路线也可以用图 2-2 的树形图给出.

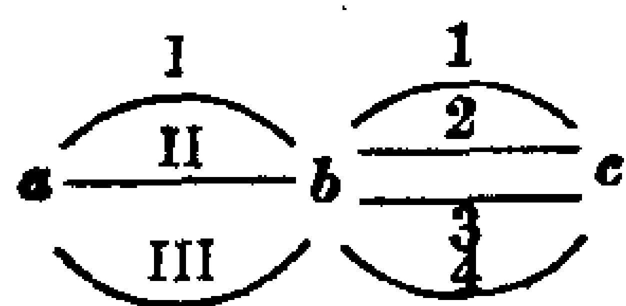


图 2-1

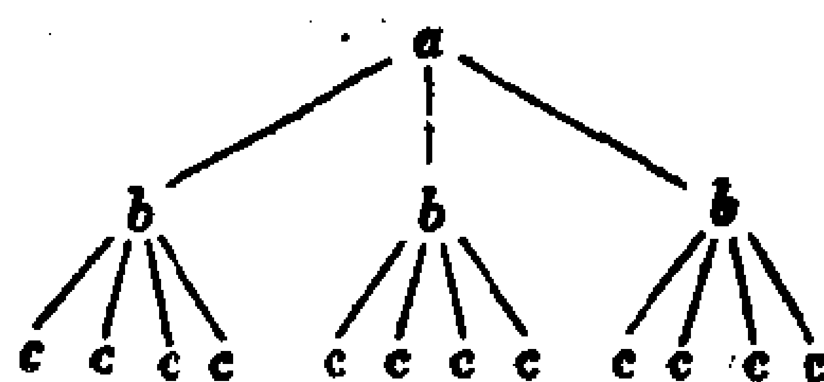


图 2-2

如果从 a 到 b 有 1 条, 2 条, 3 条, …, 50 条路，从 b 到 c 有 1 条, 2 条, 3 条, …, 100 条路，则从 a 经 b 到 c 有几种走法？更一般些，如果从 a 到 b 有 n 条路，从 b 到 c 有 m 条路，则从 a 经 b 到 c 有几种走法？经过同样的分析，可以得知共有 $n\times m$ 种走法.

人们经过大量的实践和通过长期积累起来的经验，认识到一条重要的规律，即

乘法原理 如果进行甲过程有 n 种方法，进行乙过程有 m 种方法，则进行甲过程后接着进行乙过程共有 $n\times m$ 种方法.

乘法原理是组合论的最基本的原理，用它可以证明一系列组合公式，例如：

全排列公式 n 个不同的元素排成一列，其排列数目

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$

证明 用数学归纳法．当 $k=1$ 时，$P_1=1=1!$．归纳假定 $n-1$ 个不同的元素有 $P_{n-1}=(n-1)!$ 种不同的排列．现把 n 个不同元素的排列分为两个过程．甲过程：从中取一个排在第 1 个位置上，有 n 种选择；乙过程：余下的 $n-1$ 个元素在第 2 至 n 的位置上排列，由归纳假设有 $(n-1)!$ 种排列方法．因此，由乘法原理得

$$P_n=n\cdot P_{n-1}=n\cdot(n-1)!=n!. \qquad \square$$

选排列公式 从 n 个不同的元素中任取 k 个（不许重复）排成一列，其排列数目

$$P_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

证明 把 n 个不同元素的全排列分为两个连接进行的过程．甲过程：从 n 个元素中取 k 个排在第 1 至 k 的位置上，排列数为 P_n^k；乙过程：余下的 $n-k$ 个排在第 $k+1$ 至 n 的位置上，排列数为 $P_{n-k}=(n-k)!$．由乘法原理，$P_n=P_n^kP_{n-k}$，即

$$P_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}. \qquad \square$$

圆排列公式 n 个不同的元素仅按元素的相对位置而不分首尾围成一个圆圈，这种排列叫做圆排列，其排列种数

$$P_{⊚}=(n-1)!.$$

证明略．

应用数学归纳法可以把乘法原理推广到有限个依次一个紧接着一个进行的过程的情况．

允许重复的排列公式 从 n 个不同的元素中任取 k 个（允许重复）排成一列，其排列数目为 n^k．

证明 分解为 k 个连接进行的过程，每个过程都是从 n 个元素中取 1 个，有 n 种选择；第 k 次取的元素排在第 k 个位

置上．由乘法原理，共有 n^k 种排列方法． □

不全相异元素的全排列公式 如果在 n 个元素中有 n_1 个元素彼此相同，又另有 n_2 个元素彼此相同，…，又另有 n_m 个元素彼此相同，$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列，其排列种数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

证明略。

利用乘法原理及排列公式，可以证明下述组合公式．

单组组合公式 从 n 个不同的元素中取 k 个为一组，其组合方法数目

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

其中 C_n^k 恰好等于二项式 $(1+x)^n$ 展开式中 x^k 的系数．

证明 把从 n 个不同的元素中取 k 个的选排列分为两个连接的过程．甲过程是从 n 个不同的元素中取 k 个组合，其组合数为 C_n^k；乙过程是取出的 k 个数全排列，其排列数为 $k!$．由乘法原理，$P_n^k=C_n^k k!$． □

多组组合公式 把 n 个不同的元素分成 m 组，第 i 组有 n_i 个元素，$i=1, 2, \cdots, m$，分组方法的数目

$$C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!},$$

其中 $C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 恰好等于多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 的系数．

证明 把 n 个不同元素的全排列分为 $m+1$ 个前后连接的过程．第 1 过程是把 n 个元素分成 m 组，第 i 组有 n_i 个，$i=1, 2, \cdots, m$；第 2 过程是第 1 组的 n_1 个元素在第 1 至 n_1 个位置上全排列；第 3 过程是第 2 组的 n_2 个元素在第 n_1+1

至 n_1+n_2 个位置上全排列；…；第 $m+1$ 过程是第 m 组的 n_m 个元素在第 $n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+1$ 至 n 个位置上全排列．由乘法原理，

$$n!=C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_m}\cdot n_1!n_2!\cdots n_m!.$$ □

应用乘法原理及上述排列、组合公式，可以求解较为复杂的计数问题．应用乘法原理的要点是，把一个比较复杂的“全过程”恰当地分成几个连接进行的较为简单的“分过程”，即分解成几步．但要注意，分步方法应当符合：只有几个“分过程”依次完成后，“全过程”才算完成；完成每个“分过程”的方法数容易求出．

[例 1]　从 n 双不同的鞋子中取出 m 只，$m<n$，其中没有成双的鞋子，有多少种取法？

解　把符合题设的取鞋方法分为两步．第一步：从 n 双鞋中取出 m 双，有 C_n^m 种取法；第二步：从取出的 m 双中每双各取出 1 只，有 2^m 种取法．由乘法原理，有 $C_n^m2^m$ 种取法． □

[例 2]　从 30 名男学生、20 名女学生中各选 8 名排成一列，求排列方法数目．

解　把符合题设的排列分为三步．第一步：从 30 名男生中选 8 名，有 C_{30}^8 种选法；第二步：从 20 名女生中选 8 名，有 C_{20}^8 种选法；第三步：由选出的 16 名学生全排列，有 16! 种排列方法．由乘法原理，共有 $C_{30}^8C_{20}^8 16!$ 种排列． □

[例 3]　在 $n\times m$ 棋盘的方格上放 k 枚没有区别的棋子(叫做车)，$1\leqslant k\leqslant \min\{n, m\}$，任意两枚不能放在同一行，也不能放在同一列(即不能互相吃掉)，有多少种放法？

解　图 2-3 是 $n=4$, $m=7$, $k=4$ 时符合题设的一种放法．把放棋子的过程分为两步．第一步：从 n 行中选 k 行，有

C_n^k 种选法，并设选出的 k 行自上到下行号是 $n_1, n_2, \cdots, n_k$；第二步：从 m 列中选 k 列，并给 k 列列号的一种排列，有 P_m^k 种选排列方法. 设这 k 列的列号如下排列：$m_1, m_2, \cdots, m_k$，则在 (n_1, m_1) 格、(n_2, m_2) 格、…、(n_k, m_k) 格上各放一枚棋子. (n_i, m_i) 格即指第 n_i 行与第 m_i 列交叉位置上的方格. 由乘法原理，共有 $C_n^k P_m^k$ 种放法. □

图 2-3

[例 4] 从 0 至 9 这 10 个数字中，取出 5 个互不相同的数字，写成五位数，其中有多少个奇数？

解 按下述三步写出符合题设的五位数. 第一步：从 1, 3, 5, 7, 9 中选一个作为个位数，有 5 种选法；第二步：除数字 0 及已选作个位数的那个数字外，从其余 8 个数字选一个作为万位数，有 8 种选法；第三步：除已选作个位数及万位数的 2 个数字外，从其余 8 个数字选 3 个在千、百、十位上排列，有 P_8^3 种选排列方法. 由乘法原理，共可写出 $5\times8\times P_8^3=13440$ 种符合条件的五位数. □

在例 4 中，第一步保证写出的是奇数，第二步保证写出的是五位数（万位数不为 0），这是在决定分步方法时首先要考虑到的. 另外，如果调换这两步的顺序，则将会发现要得出答数就费劲得多.

[例 5] 有男 $n+m$ 人，女 m 人 $(n、m\geqslant1)$. 问：

i. 这 $n+2m$ 人排成一列，女人不相邻，首尾都是男人，有多少种排法？

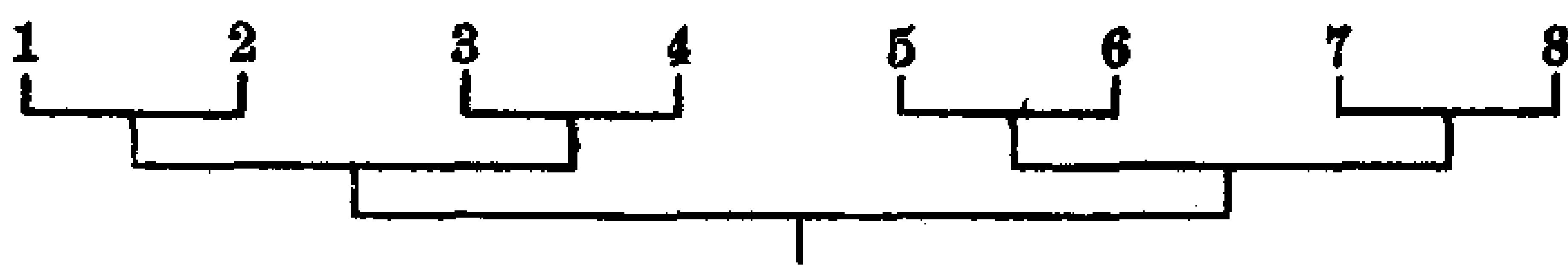
ii. 这 $n+2m$ 人围成一圈，女人不相邻，有多少种排法？

解 i. 先让 $n+m$ 个男人排成一列，有 $(n+m)!$ 种排法. 男人之间都留出一个空位，共有 $n+m-1$ 个空位. 再让 m 个女人在这 $n+m-1$ 个空位选 m 个位置排列，有 P_{n+m-1}^m 种

排列方法．由乘法原理，共有 $(n+m)!P_{n+m-1}^{m}$ 种排法．

ii．先让 $n+m$ 个男人围成一圈，由圆排列公式，有 $(n+m-1)!$ 种排法．男人之间都留出一个空位，共有 $n+m$ 个空位．再让 m 个女人在这 $n+m$ 个空位选 m 个位置排列，有 P_{n+m}^{m} 种排列方法．因此，共有 $(n+m-1)!P_{n+m}^{m}$ 种排法．注意，因男人已经排定，所以 m 个女人的排列不能当作圆排列．□

[例 6] 有 8 个队比赛，采用下面的淘汰制



问在赛前抽签时，实际上可以得到多少种不同的安排表？

解 第一轮的 4 组，自左至右记为一、二、三、四组，其中第一、二组为甲区，第三、四组为乙区．8 个队抽签即是在上图的 8 个位置排列，有 8! 种排法．但是，两种不同的排列未必是两种实际上不同的比赛安排表．事实上，8 队中的某 4 队都分在甲区与都分在乙区，实际上一样；甲区 4 队中的某 2 队都分在一组与都分在二组，实际上一样；乙区 4 队中的某 2 队都分在三组与都分在四组，实际上一样；同组（一、二、三、四组）中的 2 队，谁编为奇数号或偶数号，实际上也一样．因此，由乘法原理，在 8! 种排法中，与某一种排列 W 实质相同的排法有 $2\cdot2^2\cdot2^4=2^7$ 种（包括 W）．以 f 记实际上不同的比赛安排表的种数，则有 $2^7f=8!$，所以 $f=8!2^{-7}$．□

在例 6 中，不是直接计算 f，而是间接地通过计算与排法 W 实质相同的所有排列方法的种数，再求出 f．这是一种常用的处理方法．

[例 7] 某保密室有 6 名工作人员，规定打开保密室时

至少要有 3 个工作人员在场. 为严格执行这项规定，至少应给保密室配几把锁，至少应给每个工作人员发几把钥匙，才能使任意 2 人一定无法打开保密室，而任意 3 人一定可以打开保密室.

解 从这 6 人选出的二人小组，共有 C_6^2 个，其中任意两个小组 A_1 与 A_2，不能打开的锁一定不相同. 否则，设 A_1 组与 A_2 组都无法打开锁 a，这两组至少共有 3 人，却无法打开锁 a，与分发钥匙的要求矛盾. 因此，保密室至少应配 $C_6^2=15$ 把锁.

再考虑这 6 人中的任一个，比如张三. 对于任一个不包括张三的二人小组 A，A 组无法打开保密室，但加进张三后可以打开保密室，这表明张三手上应有二人小组 A 不能打开的那把锁的钥匙. 因不包括张三的二人小组共有 $C_5^2=10$ 个，故张三至少应有 10 把钥匙.

最后，确实可以给出一种配 15 把锁，每人分发 10 把钥匙的方案，它符合要求：任意 2 人无法打开保密室，任意 3 人能够打开保密室. 方案如下：

人	锁														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×
II	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
III	✓	✓	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
IV	✓	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓
V	✓	×	✓	✓	✓	×	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓	✓
VI	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	×	✓	✓	✓	✓

练 习 二

1．证明圆排列公式．

2．证明不全相异元素的全排列公式．

3．围棋盘由 19 条横线和 19 条纵线组成．从围棋盘的左下角那点沿最短的路线走到右上角那点，有多少种走法？

4．a、b、c、d 是围棋盘的 4 个顶点，按反时针顺序排列．从点 a 出发沿最短的路线走到对角线 bd 上，有多少种走法？

5．30030 能被多少个正整数整除？能被多少个正奇数整除？

6．设 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ 是一个由 1 至 9 中的 8 个互不相同的数字写成的八位数，而且能被 11 整除．证明，把这个八位数的 8 个数字重新排列，至少还可以写出 1151 个能被 11 整除的八位数．

7．$\triangle ABC$ 的三边分别有 n_1 个点、n_2 个点、n_3 个点，且都不是 $\triangle ABC$ 的顶点．联结不在同一边上的点能得到多少条直线？

8．一副桥牌 52 张排成一列，任意两张 A 牌不相邻的排法数目是多少？

9．从 n 件不同的东西挑出若干件（可以一件也不挑）组成集合，能组成多少个集合？

10．从 1 至 100 的整数中，取两个（不许重复）组成有序对 (x, y)，其乘积 xy 不能被 3 整除的有多少对？如果允许重复，有多少对？

11．$2n$ 个乒乓球选手参加单打比赛，在第一轮比赛中每人参加一场．问：安排第一轮比赛有多少种不同的方法？

12．有一凸十边形，用 7 条在此十边形内部不相交的对角线把十边形分成 8 个三角形，每个三角形至少有一条边是这十边形的边，求剖分方法种数．如是凸 n 边形 $(n\geqslant4)$，有多少种剖分方法 $f(n)$？

三、配 对 法

小孩子数苹果，他掰着手指头，一个一个地掰，掰完左手掰右手．这种数苹果的方法，就是一种配对法．小孩子把苹果(集合 A)与自己的手指头(集合 B)一一配对，他掰了几个手指头，也就数出几个苹果．配对法也是一种简单的、原始的计数方法．

配对原理 设 A、B 是集合．把 A 中的一个元素与 B 中的一个元素配成对，A、B 中的每一个元素只能参加一对．如果 A、B 中的所有元素都配上对，即 A 与 B 之间可以建立一种一一对应，则有❶ $|A|=|B|$．

应用配对法求 $|A|$，关键是寻找一个既能与集合 A 建立一一对应又便于计数的集合 B．因此，配对法实质上是一种转换法，它把求 $|A|$ 的问题转换为求 $|B|$ 的问题．至于寻求合适的集合 B，往往需要相当的技巧．

[例 1] n 名选手参加单打淘汰赛，需要打多少场后才能产生冠军？

解 要淘汰 1 名选手必须进行 1 场比赛；反之，每进行一场比赛则淘汰 1 名选手．把被淘汰的选手与他被淘汰的那场比赛配对．因此，比赛的场数与被淘汰的人数相等．要产生冠军，必须淘汰 $n-1$ 个选手，故应进行 $n-1$ 场比赛． □

[例 2] 某人有 n 块大白兔奶糖，从元旦那天开始，每天至少吃 1 块，吃完为止，有多少种安排方案？

❶ 本书中，一个集合 S 的元素的个数常记成 $|S|$。

解 n 块奶糖(用黑圆点表示)排成一行，每两块之间留一空位，共有 $n-1$ 个空位．在每个空位填上符号"|"或"+"，并约定形如下图

$$\cdot+\cdot|\cdot+\cdot|\cdot|\cdot+\cdot+\cdot$$

表示一种安排方案：第一天吃 2 块，第二天吃 2 块，第三天吃 1 块，第四天吃 3 块．因此，安排方案全体组成的集 A 与上述 $n-1$ 个空位的填写符号方法全体组成的集 B 一一对应，故有 $|A|=|B|$．$n-1$ 个空位，每个空位有 2 种填写方法，所以 $|B|=2^{n-1}$，从而 $|A|=2^{n-1}$． □

例 2 与正整数的所谓有序分拆数问题有关．正整数 2 可以表为 $2=2$, $2=1+1$; 正整数 3 可以表为 $3=3$, $3=2+1$, $3=1+2$, $3=1+1+1$; 正整数 4 可以表为 $4=4$, $4=3+1$, $4=1+3$, $4=2+2$, $4=2+1+1$, $4=1+2+1$, $4=1+1+2$, $4=1+1+1+1$; 等等．上面这种正整数表示称为**正整数的有序分拆**．正整数 n 的有序分拆的种数称为 n **的有序分拆数**，记为 $r(n)$．显然，$r(2)=2$, $r(3)=4$, $r(4)=8$．例 2 的结论即是给出 $r(n)=2^{n-1}$．

[例 3] 有编号自 1 至 m 的 m 张纸片，

i. 从这 m 张纸片中取出 1 张，放回；再取出 1 张，放回；按这规则(称为**有放回的抽样**)共取 n 次．设第 i 次抽到 k_i 号，$i=1, 2, \cdots, n$．求这 n 个号码组成不减数列

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant \cdots \leqslant k_n \tag{1}$$

的抽样方法(其全体记为 A)的种数．

ii. 从这 m 张纸片中取出 n 张($2n-1 \leqslant m$)，不许重复，求这 n 个号码没有邻号的组合数(其全体记为 E)．

解 i. 把递增数列

$$0<1<2<\cdots<n-1 \tag{2}$$

依次一对一地加进(1)式：$j_i=k_i+(i-1)$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$. 得数列

$$j_1<j_2<j_3<\cdots<j_n, \tag{3}$$

满足 $1\leqslant j_i\leqslant m+n-1$, $i=1, 2, 3, \cdots, n$. 以 B 记适合(3)式的 n 元有序数组$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$全体. 容易知道，依规则 $j_i=k_i+(i-1)$（这里 $i=1, 2, \cdots, n$），A 与 B 一一对应，故 $|A|=|B|$. 因 B 中 n 元有序数组的个数等于从 1 至 $m+n-1$ 的 $m+n-1$ 个整数中取 n 个(不许重复)的组合数，所以有 $|A|=|B|=C_{m+n-1}^n$.

ii. 设取出的 n 张纸片的号码从小到大排列是

$$l_1<l_2<l_3<\cdots<l_n, \tag{4}$$

其中 $1\leqslant l_1$, $l_n\leqslant m$. 因没有邻号，故 $l_{i+1}-l_i\geqslant 2$, 这里 $i=1, 2, \cdots, n-1$. 把数列(4)与(2)依次一对一地相减：$r_i=l_i-(i-1)$（这里 $i=1, 2, \cdots, n$），得数列

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n, \tag{5}$$

满足 $1\leqslant r_1$, $r_n\leqslant m-(n-1)$, $r_{i+1}-r_i\geqslant 1$, $i=1, 2, \cdots, n-1$. 以 F 记适合(5)式的 n 元有序数组$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$全体. 依规则 $r_i=l_i-(i-1)$（其中 $i=1, 2, \cdots, n$），E 与 F 一一对应，故$|E|=|F|$. 因 $|F|=C_{m-n+1}^n$, 所以 $|E|=C_{m-n+1}^n$. □

例 3 的解法非常漂亮. 在 i 中采用的技巧是，通过添加数列(2)，把有放回抽样问题转化为业已解决了的无放回抽样问题；而 ii 中则是通过减去数列(2)，把有约束条件的组合问题转化为没有约束条件的组合问题. 把带重复(或带约束条件)的计数问题转化为不带重复(或不带约束条件)的计数问题，这种转换技巧在计数中还有不少地方用到，是典型的解题技巧.

[例 4] 把 r 个没有区别的球分放进编号自 1 至 n 的 n 个盒里，每盒球数不限，

i. 求可以区别的放法种数;

ii. 求没有空盒的放法种数,设 $r \geqslant n$.

解 i. $n-1$ 个黑圆点排在直线 L 上,把 L 分成 n 段,每段看成一个盒子,自左到右编为 1, 2, …, n 号. r 个球没有区别,都用星号 * 表示. r 个球在 n 个盒的占位方法,可与 r 个星号 * 与 $n-1$ 个圆点 · 在 L 上的排列方式一一配对. 比如,下图



对应着:1 号盒放 1 球,2 号盒放 2 球,3 号盒没有球,4 号盒放 1 球,5 号盒放 4 球. 以 A 记满足题设的放球方法全体,以 B 记 r 个 * $n-1$ 个 · 的排列方式全体,则 $|A|=|B|$. B 中的每一种排列方式可如下得到:在 L 上的 $r+n-1$ 个位置中选 r 个放上 *,余者放上 ·. 因此 $|A|=|B|=C_{r+n-1}^{r}$.

ii. 为了使每盒不空,可每盒先各放 1 球. 球无区别,故只有 1 种放法. 余下的 $r-n$ 个球分放 n 盒,由 i 的结论,有 $C_{r-n+n-1}^{r-n}$ 种放法. 因此,没有空盒的放法有 C_{r-1}^{r-n} 种. □

例 4 属于组合论中的分配问题,它与概率论中著名的**占位问题**有关. 近代统计物理学家在研究固体、液体、气体、量子、质子、中子等理论时,常把所研究的对象看成由大量的微粒子组成,把微粒子所在的空间设想成许多盒子,构造出所谓**微粒子模型**. 例 4 正是与此有关的一种数学模型,把大量的微粒子看作没有区别的球,而微粒子所在的空间看作可以区别的盒子. 这种模型为著名物理学家玻色(S. N. Bose)和爱因斯坦(A. Einstein, 1879~1955)所引进.

m 个没有区别的黑球与 n 个没有区别的白球排成一列,比如 6 个黑球与 4 个白球的如下排列

可以看作由6段构成，每段都是同色球，相邻的两段不同色．称每一段为一个连贯，是黑球的叫黑连贯，是白球的叫白连贯．连贯中球的个数叫做该连贯的长度．

［例5］ m个没有区别的黑球与n个没有区别的白球排成一行．设$k+1\leqslant\min\{m, n\}$．求恰好有k个黑连贯与$k+1$个白连贯的排列方法数．

解 因白连贯比黑连贯多1个，故首尾都是白连贯．$k+1$个白连贯的连贯长度的一种排列

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots,\ n_{k+1}, \tag{6}$$

相当于n个没有区别的球分放进$k+1$个编了号的盒中，每盒都不空的占位方法．所以白连贯长度形如(6)式的排列方式种数，由例4之ii，有C_{n-1}^{k}种．对于每一种$k+1$个白连贯长度的排列方式(6)，把两个白连贯之间的位置当作一个盒子，共有k盒，然后，把m个黑球分放进这k个盒里，每盒不空．由例4之ii，有C_{m-1}^{k-1}种放法．于是，由乘法原理，符合题设的排列有$C_{n-1}^{k}C_{m-1}^{k-1}$种． □

［例6］ 圆周上有n个点$(n\geqslant6)$，每两点间作线段，假设其中任意3条在圆内不共点．求由这些线段确定的、顶点落在圆内的三角形的个数．

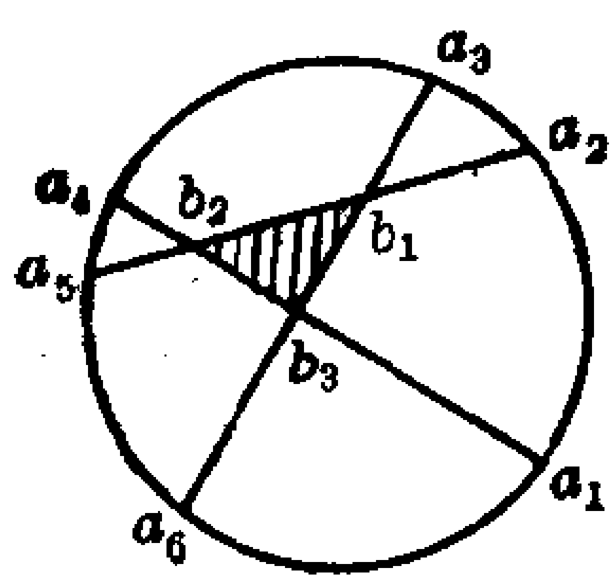


图 3-1

解 符合题设的三角形全体记为A．设$\triangle b_1b_2b_3\in A$，延长三边，与圆周有6个交点$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$（图3-1，设这6点按反时针顺序排列），它们是$n$个给定点中的6个点．反过来，对这6个点，也只有联结a_1a_4、a_2a_5、a_3a_6才能得到A中的一个三角形．而且，由n个给定点中的任意6个点都可以按这种联结方法得到A

中的一个三角形．令 $\triangle b_1b_2b_3$ 与 6 点集 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ 配对，这给出了 A 中的三角形与由 n 个给定点产生的 6 点集之间的一种一一对应．由 n 个点产生的 6 点集有 C_n^6 个，所以 $|A| = C_n^6$． □

［例 7］ 弟弟有 20 块大白兔奶糖，哥哥告诉他两种吃法．甲：第一天吃 5 块，以后每天至少吃 1 块，但不能比前一天多，吃完为止；乙：第一天吃糖数量不限，以后每天至少吃 1 块，但不能比前一天多，5 天吃完．证明，按甲、乙两种吃法安排的方案（其全体分别记为 A、B）一样多．

证明 图 3-2 的左边代表按甲作出的一种方案：第一天吃 5 块，第二、三天各吃 4 块，第四天吃 3 块，第五、六天各吃 2 块．把该点阵绕对角线 l 翻转 180°，得到右边的点阵，它代表按乙作出的一种方案：第一、二天各吃 6 块；第三天吃 4 块，第四天吃 3 块，第五天吃 1 块，五天吃完．令这两种方案配对．按这配对法，A 与 B 一一对应，所以 $|A| = |B|$． □

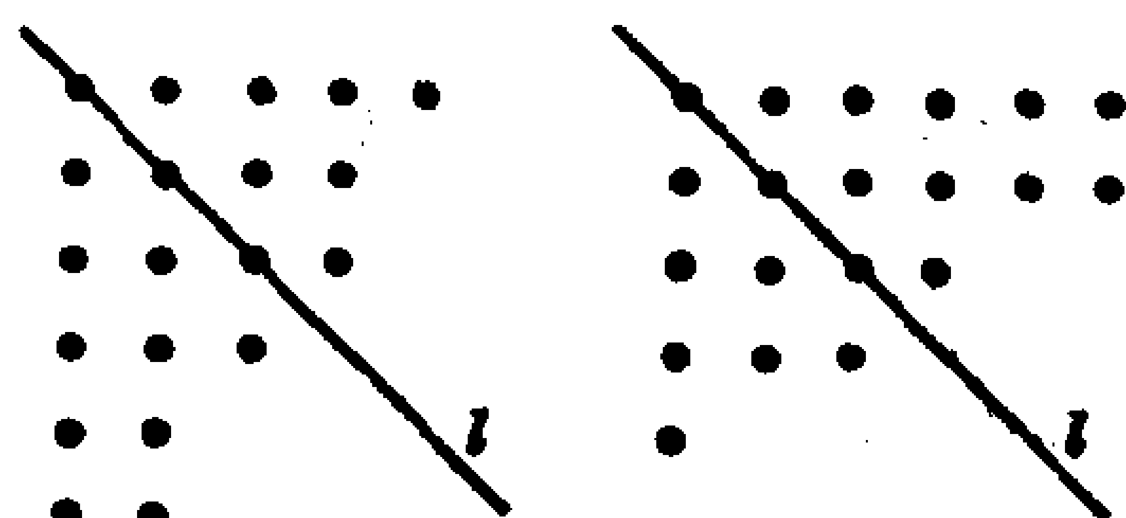


图 3-2

例 7 与正整数的所谓无序分拆数有关．如果把 3 的有序分拆 $3=2+1$ 与 $3=1+2$ 看作没有区别，把 4 的有序分拆 $4=3+1$ 与 $4=1+3$ 看作没有区别，把 $4=2+1+1$，$4=1+2+1$，$4=1+1+2$ 看作没有区别，即只要和项相同，而不管它们在和式中的顺序，都看作同一种分拆，这种分拆称为**正整数的无序分拆**．为确定起见，无序分拆中的和项皆由大到小书写．正整数 n 的无序分拆的种数称为**正整数 n 的无序分拆数**，简称 n 的分拆数，记为 $p(n)$．对无序分拆数 $p(n)$ 的研究，是数论和组合论共同关心的课题．欧拉(L. Euler)和哈代

(G. H. Hardy)在这领域中都有重要的贡献. 例 7 中的点阵图,称为弗勒(N. M. Ferrer)图式或分拆图解式. 其特点是:点阵中每行的点数自上而下构成不增点列, 而且各行的第 1 点上下对齐,其余各点自左到右等距排列,上下对齐. 弗勒图式是证明关于 $p(n)$ 的许多恒等式的一个很有用的工具.

4 个实数 a_1, a_2, a_3, a_4 按下面的顺序写成乘积

$$a_1a_2a_3a_4,$$

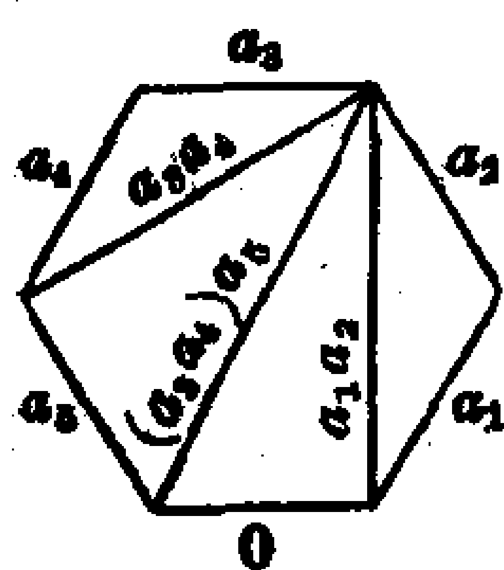
添上一些括号,得出如下几种形式

$$a_1((a_2a_3)a_4),\quad a_1(a_2(a_3a_4)),\quad ((a_1a_2)a_3)a_4,$$
$$(a_1(a_2a_3))a_4,\quad (a_1a_2)(a_3a_4)$$

其中每种添加括号的方式都由括号指明了这 4 个数的乘积结合方式,每次相乘由两个数作成,称它们为 $a_1a_2a_3a_4$ 的乘积结合方式.上面是 4 个排定了顺序的实数的 5 种乘积结合方式.

[例 8] 在凸 $n+1$ 边形($n\geqslant 3$)中画 $n-2$ 条在 $n+1$ 边形内部不相交的对角线, 把这 $n+1$ 边形分成 $n-1$ 个不相迭交的三角形区域. 以 A 记所有的画法全体,以 B 记 n 个指定了顺序的实数的所有乘积结合方式全体. 证明 $|A|=|B|$.

证明 为清楚起见, 以凸 6 边形(即 $n=5$)为例. 如图 3-3,凸 6 边形的 6 条边按反时针顺序依次用实数 $0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 表示. 左图的画法(A 中的元素)与乘积结合方式 $(a_1a_2)((a_3a_4)a_5)$ (B 中的元素)配对. 这种对应按下述规则给出: 以 a_1、a_2 为边的三角形的第三边以 a_1a_2 表示; 以 a_3、a_4 为边的三角形的第三边以 a_3a_4 表示; 以 a_3a_4、a_5 为边的三角形的第三边以 $(a_3a_4)a_5$



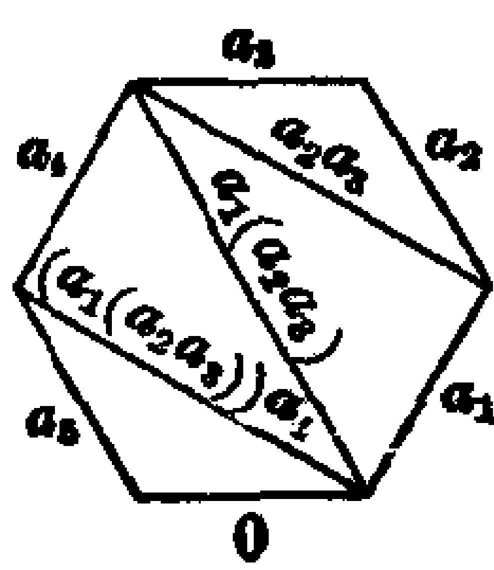


图 3-3

表示；于是0边，即以$(a_3a_4)a_5$、a_1a_2为边的三角形的第三边，以$(a_1a_2)((a_3a_4)a_5)$表示．按此规则，不难知道右图的0边以$((a_1(a_2a_3))a_4)a_5$表示．于是，对应于A中的一种画法，0边就用一种B中的结合方式表示，令它们配对，则A与B一一对应．因此，$|A|=|B|$．这里的证法对$n\geqslant3$都适用． □

练　习　三

1．圆周上有n个点$(n\geqslant4)$，每两点之间作线段，假设这些线段的任意3条在圆内不共点，求这些线段在圆内的交点数目．

2．L_1与L_2是平面上的两条平行线，在L_1、L_2上分别有n_1、n_2个点$(n_1$、$n_2\geqslant2)$，把L_1上的点与L_2上的点一一联成线段，假设这些线段的任意3条在L_1与L_2所夹的区域$\mathscr{D}$内不共点，求这些线段在$\mathscr{D}$内的交点数目．

3．把1000000分成两个正整数的乘积，有多少种方法？规定乘积式的两个因子是有序的，即形如100×10000与10000×100看作不同的乘积式．又，分成三个正整数的乘积有多少种方法？

4．从编号自1至m的m张纸片中取n张，不许重复，求任意两张的号码相差必大于r的取法种数．这里，$m+r\geqslant n(r+1)$．

5．从装有$n-1$个没有区别的黑球和$n-1$个没有区别的白球的袋里，逐一取出所有$2n-2$个球．以A记每次取球后留在袋里的黑球不少于留在袋里的白球的取法全体，以B记n个指定顺序的实数的乘积结合方式全体．证明$|A|=|B|$．

6．从装有n个没有区别的黑球和n个没有区别的白球的袋里，逐一取出所有的球．以A记在取球过程中至少有一次留在袋里的白球比黑球多的取球方法全体，证明$|A|=C_{2n}^{n+1}$．

7．设整数r、$n\geqslant1$．求方程$x_1+x_2+\cdots+x_n$的非负整数解的组数．

8．设整数$n\geqslant1$．空间直角坐标系$Oxyz$的闭卦限$x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$（或开卦限$x>0$, $y>0$, $z>0$）中有多少个格点落在平面$x+y+z=n$上？这里，把x、y、z都是整数的点(x, y, z)称为格点．

9．有n种颜色的球，同色球不加区别，现要在一个盒里装m个球，每种颜色的球数量不限，有多少种装法？

10．试用另一种配对法解本书第15页之例3之ii．

四、加法原理与分组法

也许你看过电视剧《星光》吧，它描写我国古代著名天文学家张衡的童年生活．在晴朗的夜晚，天上星罗棋布，小张衡数天上的星星，一颗一颗地指着数，不是数漏了就是数重了，数来数去，数得眼花缭乱，总也数不清．要是小张衡有一张星图，就方便多了．不过，如果还是指着星图上的小黑点一个一个地数，也是数不清的．怎么办？有个好办法，就是把星图分成几个区域，每块区域的黑点不太多，然后一个区域一个区域地数．这种计数方法就是分组法．分组法根据的是组合分析中下述原理：

加法原理　如果进行甲过程有 n 种方法，进行乙过程有 m 种方法，甲、乙两过程并行，则进行甲过程或乙过程的方法有 $n+m$ 种．

所谓甲、乙两过程并行，是指甲、乙两过程没有先后顺序，甲过程的进行不必等待乙过程结束，而乙过程的进行也不必等待甲过程结束．

加法原理也可用集合的语言叙述．设 A、B 是集合，由 A、B 的元素全体构成的集合称为 A、B 的并集，记为 $A\cup B$；由 A、B 的公共元素全体构成的集合称为 A、B 的交集，记为 $A\cap B$．不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$．如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 不交．加法原理的集合论形式如下：

如果把集合 S 分成两个子集 A、B，$S=A\cup B$，且 $A\cap B=\varnothing$，则 S 的元素的个数等于 A、B 的元素个数之和，即

$$|S|=|A|+|B|.$$

加法原理和乘法原理一样，是通过大量的事实与长期积累的经验认识到的一条规律，不需证明而为人们所承认. 加法原理和乘法原理是计数的两条基本原理，全部计数公式的推导和证明都基于这两个原理.

加法原理可以推广到有限个并行的过程的情况，这里给出这种推广的集合论形式. 由集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的元素全体构成的集合称为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的并集，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$. 由 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的公共元素(即属于这 m 个集的任一集的元素)全体构成的集合称为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的交集，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m$. 如果集合 S 分成子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，这 m 个子集两两不交，而且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=S$，则子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 称为集 S 的一个分划.

加法公式 设子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 S 的一个分划，则 S 的元素个数等于这 m 个子集的元素个数之和，即

$$|S|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|. \tag{1}$$

简单地说，整体等于局部的和.

证明 用数学归纳法. 当 $m=2$ 时，即是加法原理. 作归纳假设：(1)式对任意 $m\leqslant k$ 成立. 下面证明(1)式对 $m=k+1$ 成立. 记 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=S_1$，则 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup A_{k+1}=S_1\cup A_{k+1}$. 因 $A_1, A_2, \cdots, A_k, A_{k+1}$ 两两不交，故 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两不交且 $S_1\cap A_{k+1}=\varnothing$. 因此，由加法原理，$|S|=|S_1|+|A_{k+1}|$，由归纳假设 $|S_1|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_k|$，所以

$$|S|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_k|+|A_{k+1}|. \qquad \square$$

应用加法公式，就是把一个大规模的集合(即元素个数较多的集合)分划为若干个两两不交的小规模的子集，即把整体

分成若干个局部，使得每个局部的元素个数便于计数．所谓分组法，用集合的话说，就是对集合进行分划．至于如何分划，即如何分组，这要视具体问题而定．下面给出数例来说明如何分组的一些典型技巧．

［例 1］ 甲、乙二人比赛乒乓球，先胜三局的算赢，直到决出输赢为止．甲、乙的比赛有多少种可能情形发生？

解 各种可能情形全体记为 S，其中甲赢的各种情形全体记为 A，乙赢记为 B，则 $S=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，而且 $|A|=|B|$．因此 $|S|=2|A|$．

现在考虑甲赢的各种情形．要决出输赢，至少要打满 3 局，至多打 5 局．按比赛局数把 A 分为三组．A_1：打满 3 局，都是甲胜，只有 1 种可能；A_2：打满 4 局，最后一局甲胜，另 2 个胜局在头 3 局中的某两局，有 $C_3^2=3$ 种可能；A_3：打满 5 局，最后一局甲胜，另 2 个胜局在头 4 局中的某两局，有 $C_4^2=6$ 种可能．很明显，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，而且 A_1、A_2、A_3 两两不交．由加法公式，得

$$|S|=2|A|=2(|A_1|+|A_2|+|A_3|)$$
$$=2(1+3+6)=20. \qquad \square$$

［例 2］ 12 个不同的球分放进 3 只不同的盒里，每盒不空且只能放偶数个．求放法种数．

解 题设的放法全体记为 A．按 3 只盒里的球数分配把 A 分为三组．A_1：3 只盒子的球数分配依次是 2、2、8，或 2、8、2，或 8、2、2．此时，对其中任意一种分配方式，由多组组合公式，有 $\dfrac{12!}{8!2!2!}=2970$ 种分放方法．所以 $|A_1|=3\times2970=8910$．A_2：3 只盒子的球数为 2、4、6，它们在 3 只盒子的分配情况有 $3!=6$ 种．对其中任一种分配方式，由多组组合公式，

有 $\frac{12!}{6!4!2!}=13860$ 种分放方法. 所以 $|A_2|=6\times13860=83160$. A_3: 3 只盒子的球数为 4、4、4. 此时由多组组合公式, $|A_3|=\frac{12!}{4!4!4!}=34650$. 三组两两不交, 所以

$$
\begin{aligned}
|A| &= |A_1\cup A_2\cup A_3| \\
&= |A_1|+|A_2|+|A_3| = 126720.
\end{aligned}
$$
□

[例 3] 用数字 1、2 写十位数, 至少有连续 5 位都是数字 1, 这样的十位数有多少个?

解 十位数的 10 个位置自左到右依次叫做第 1, 2, …, 10 位. 符号"$i\to j$"表示第 i 位至第 j 位的数字都是 1, 而第 $i-1$ 位与第 $j+1$ 位(如果有)不是数字 1. 现按连续出现 1 的长度把符合题设的十位数全体 A 分为五组. A_1: 有连续 10 个 1, 只有 1 个. A_2: 恰有连续 9 个 1. 其中 $1\to9$ 有 $1=2^0$ 个, $2\to10$ 有 $1=2^0$ 个. A_3: 恰有连续 8 个 1. 其中 $1\to8$ 有 2^1 个, 因为第 9 位必是 2, 第 10 位可取 1 或 2; $2\to9$ 有 $1=2^0$ 个, 因第 1 位与第 10 位必取 2; $3\to10$ 有 2^1 个, 因第 2 位必取 2, 第 1 位可取 1 或 2. A_4: 恰有连续 7 个 1. 其中 $1\to7$ 与 $4\to10$ 各有 2^2 个; $2\to8$ 与 $3\to9$ 各有 2^1 个. A_5: 恰有连续 6 个 1. 其中 $1\to6$ 与 $5\to10$ 各有 2^3 个; $2\to7$、$3\to8$、$4\to9$ 各有 2^2 个. A_6: 恰有连续 5 个 1. 其中 $1\to5$ 与 $6\to10$ 各有 2^4 个; $2\to6$、$3\to7$、$4\to8$、$5\to9$ 各有 2^3 个. 把上述的数目排成右边的三角形, 自上而下的 6 行依次是 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 所包含的元素的个数. 由加法公式,

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & & 2^0 \quad 2^0 & & & \\
 & & 2^1 \quad 2^0 \quad 2^1 & & & \\
 & & 2^2 \quad 2^1 \quad 2^1 \quad 2^2 & & & \\
 & & 2^3 \quad 2^2 \quad 2^2 \quad 2^2 \quad 2^3 & & & \\
 & & 2^4 \quad 2^3 \quad 2^3 \quad 2^3 \quad 2^3 \quad 2^4 & & &
\end{array}
$$

$$|A|=1+3\cdot2^0+4\cdot2^1+5\cdot2^2+6\cdot2^3+2\cdot2^4=112.$$

用上面三角形所示的规律, 可得一般结论. □

例 3 与本书第 18 页的例 5 都是所谓的"连贯"问题. 例 3 与连贯的长度有关, 而第 18 页的例 5 与连贯的个数有关. 在古典概率中, 有许多与连贯有关的问题. 例如, 在产品抽样中, 每次抽查 1 个产品, 可能抽到正品(记为 α), 也可能抽到次品或废品. 如果我们关心的是抽到正品, 那末在一次抽样中, 要是抽到正品, 则说这次抽查是成功的. 现在逐一抽样 n 次, 设抽到的产品依次是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 如果其中 $a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}$ 都是正品(α), 而 a_k 与 a_{k+m+1}(如果有)都不是正品, 则 $a_{k+1}, \cdots, a_{k+m}$ 便称是一个 α 连贯, 数 m 称为这个 α 连贯的长. 如果在 n 次抽样中最长的 α 连贯的长 $m \geqslant r$, 则说这 n 次抽样中出现 r 成功. 例 3 就是与 r 成功有关的计数问题.

[例 4] 有 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ 等 6 种颜色, 在单位立方体的 6 个面上各填一色, 且任意两面不同色, 有多少种填色方法? 规定: 两个填了色的单位立方体, 如果经旋转后可以相合(即迭合的面填同色), 则看作同一种填色法.

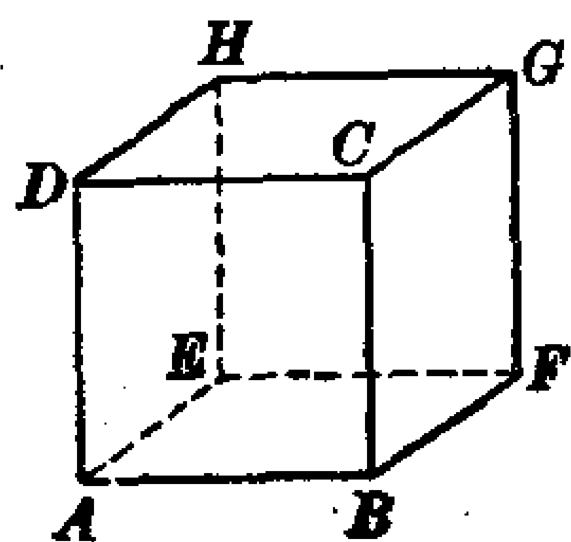


图 4-1

解 设图 4-1 为单位立方体. $ABCD$、$BFGC$、$FEHG$、$EADH$、$DCGH$、$ABFE$ 等 6 个面依次记为 I、II、III、IV、V、VI. 按题中规定, 不妨假设在 I 上填 c_1 色. 现按 c_2 色填在 I 的邻面或对面 III 分为两组. A_1: c_2 色填在 I 的邻面, 此时又按题中规定, 不妨假设在 V 上填 c_2 色, 而其余 4 面可用 c_3、c_4、c_5、c_6 随意填色, 每色填一面, 有 4! 种填色法, 且任意两种填法经旋转不会相合. A_2: c_2 色填在 I 的对面 III, 此时其余 4 面用 c_3、c_4、c_5、c_6 随意填色, 每色填一面, 按题中规定, 其填色方法等于这 4 种颜色在 4 个面 II、IV、V、VI 上的圆排列, 有 $(4-1)!=3!$ 种填色方法. 由加法公理, 共有 $4!+3!=30$ 种填色方法. □

例 4 有许多推广. 比如，把立方体改为各种正多面体，把供使用的颜色限定为 n 色. 解决这类问题的难点在于把经过旋转可以相合的填色法当作相同的填色法. 目前解决这类问题的有力工具首推所谓波利亚(G. Pólya)理论.

[例 5] 有一 $n\times m$ 棋盘(n、$m\geqslant 2$)，缺右上角一格. 在这棋盘上放 k 枚没有区别的车，任意两枚车不能互相吃掉. 求放法种数 $f(n, m, k)$. 设 $k\leqslant\min\{n, m\}$.

解 由本书第 9 页例 3，在完整的 $n\times m$ 棋盘上放 k 枚不能互相吃掉的车的方法(其全体记为 E)种数为 $C_n^kP_m^k$. 把 E 分为两组. E_1: 右上角一格不放车. 此时相当于在缺右上角一格的 $n\times m$ 棋盘放 k 枚不能互相吃掉的车，有 $f(n, m, k)$ 种放法. E_2: 右上角那一格放一枚车. 此时第 1 行与第 m 列上的任一格不能再放车，因而其余 $k-1$ 枚车只能在 $(n-1)\times(m-1)$ 棋盘上放置，不能互相吃掉的放法种数等于 $C_{n-1}^{k-1}P_{m-1}^{k-1}$. 由加法公式，$|E|=|E_1|+|E_2|$，即 $|E_1|=|E|-|E_2|$，从而

$$f(n, m, k)=C_n^kP_m^k-C_{n-1}^{k-1}P_{m-1}^{k-1}.\qquad\square$$

与前几例不同，例 5 并不直接对符合题设的放法全体 E_1 进行分组，而是对比 E_1 更广泛的一类放法 E 进行分组: $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$. 这里的 E_2 称为 E_1 关于 E 的余集. 为了求出 $|E_1|$，转而对 E 及 E_1 关于 E 的余集进行计数，这是一种经常采用的处理方法.

例 5 与本书第 9 页例 3 都是所谓象棋的车问题的变形. 古典的车问题是: 在 8×8 的国际象棋盘上放 k 枚车，有多少种放法使得它们不能互相吃掉? 这即是第 9 页例 3 中取 $n=m=8$ 的特款. 这个问题可以推广到任意形式的棋盘.

[例 6] 有颗 n 面骰，各面的点数互不相同，丢掷时任何一面都有可能朝上. 以 A 记丢掷这颗骰子 3 次，使出现(即朝

上那面)的点数之和能被3整除的丢掷结果全体. 证明

$$|A|\geqslant\frac{1}{4}n^3.$$

证明 设这颗骰子的n个面上，点数被3整除的有n_1面，被3除余数为1的有n_2面，被3除余数为2的有n_3面，$n_1+n_2+n_3=n$. 丢掷结果用3元有序数组(x_1, x_2, x_3)表示：第i次出现x_i点，$i=1, 2, 3$. 丢掷结果(x_1, x_2, x_3)属于A，当且仅当$x_1+x_2+x_3$被3整除. 把A分成四组. A_1: x_1、x_2、x_3都是3的倍数，此时$|A_1|=n_1^3$; A_2: x_1、x_2、x_3被3除的余数都是1，此时$|A_2|=n_2^3$; A_3: x_1、x_2、x_3被3除的余数都是2，此时$|A_3|=n_3^3$; A_4: x_1、x_2、x_3中有1个是3的倍数，有1个被3除余1，有1个被3除余2，此时$|A_4|=6n_1n_2n_3$. 由加法公式

$$\begin{aligned}|A|&=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|\\&=n_1^3+n_2^3+n_3^3+6n_1n_2n_3.\end{aligned}$$

另一方面，因为

$$\begin{aligned}&4(n_1^3+n_2^3+n_3^3+6n_1n_2n_3)-(n_1+n_2+n_3)^3\\&\quad=3[n_1(n_1-n_2-n_3)^2+n_2(n_2-n_1-n_3)^2\\&\qquad+n_3(n_3-n_1-n_2)^2]\geqslant 0,\end{aligned}$$

而$n_1+n_2+n_3=n$，所以

$$4(n_1^3+n_2^3+n_3^3+6n_1n_2n_3)\geqslant n^3,$$

从而$|A|\geqslant\frac{1}{4}n^3$. □

练 习 四

1. 把m个没有区别的黑球与n个没有区别的白球排成一列，求恰有k个黑连贯的排列数. 设$k+1\leqslant\min\{m, n\}$.

2. 有多少个被3整除且含有数字6的五位数?

3. 用1、2、3、4、5、6这六种数字(可以重复)写十位数，其中至少有连续5位都是1的十位数有多少个?

4. 把 1000000 分成三个大于 1 的整数的乘积，有多少种方法？规定乘积式的因子是有序的，比如 $10\times10\times10000$ 与 $10\times10000\times10$ 是两个不同的乘积式.

5. 把 11 个不同的球分放进 3 只不同的盒里，每盒放奇数个，有多少种放法？

6. $2n+1$ 张戏票分给 3 个班，任何一班分到的票数不超过另两班分到的票数之和，有多少种分法？

7. 正四面体的 4 个顶点用 4 种颜色染色，每种颜色可染的顶点数目不限，有多少种染色方法？规定：经过旋转后可以相合的染色法看作没有区别的.

8. r 个没有区别的球分放进 n 个不同的盒里，求至多有 3 个空盒的放法种数．设 $r\geqslant n\geqslant 3$.

9. 有一 $n\times m$ 棋盘，n、$m\geqslant 2$，但缺右上角一格和左下角一格．在这缺角棋盘上放 k 枚没有区别的车，任意两枚车不能互相吃掉．求放法种数．设 $k\leqslant \min\{m, n\}$.

10. $2n$ 个人围成一圈，从中选 r 人，任意两人不相邻，有多少种选法？

11. 平面上有 n 个点 $(n\geqslant 5)$，任意 3 点不共线．从中取 4 点，使得以它们为顶点可作凸四边形．这种取法全体记为 A_n，证明 $|A_n|\geqslant \frac{1}{n-4}C_n^5$.

12. 有 1, 2, 3, …, n 岁的小孩各 1 人，排成一列．除排头的小孩外，其余的每个小孩都可以在他前面的孩子中找到和他相差 1 岁的孩子．求符合上述要求的排队方法种数 a_n.

13. 从装有 n 个没有区别的黑球和 n 个没有区别的白球的袋里逐一取出所有的球．以 D 记在取球过程中，取出的黑球都不少于取出的白球的取球方式全体，求 $|D|$.

14. 有 n 个没有区别的红球和其他 $2n$ 种颜色的球各 1 个，从这 $3n$ 个球中取 n 个组合，求组合数 a.

15. 设整数 $n\geqslant 1$，把长为 $6n$ 的绳子剪成三段，每段绳长取整数值，有多少种剪法？

五、容斥原理

在应用加法原理时，关键在于把所要计数的集合 A 分划为若干个两两不交的子集，使得每个子集便于计数. 但一般说来，要找到两两不交而又便于计数的分划并不那么容易. 因此自然会产生这样的问题，即把集合 A 分成若干子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，它们不是两两不交的，如何通过 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 来求 $|A|$？为此，需要把加法公式加以推广.

设 A、B 是集合，由属于 A 但不属于 B 的元素全体构成的集合称为 A 对 B 的差集，记为 $A-B$. 我们有

容斥原理 把集合 A 分为子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，即 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$，则

$$
\begin{aligned}
|A| &= |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m| \\
&= \sum_{1\le i\le m}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| \\
&\quad + \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

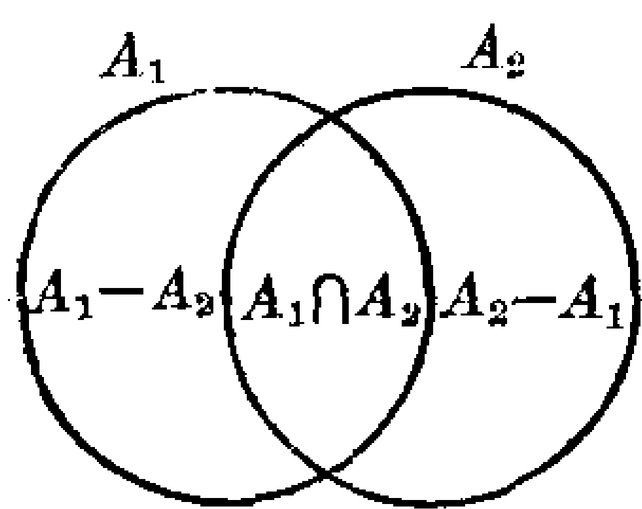


图 5-1

证明 用归纳法. 当 $m=2$ 时，容易证明(图 5-1)，

$$A=A_1\cup A_2=A_1\cup(A_2-A_1),\ A_1\cap(A_2-A_1)=\varnothing,$$

由加法公式，

$$
\begin{aligned}
|A| &= |A_1\cup A_2| = |A_1\cup(A_2-A_1)| \\
&= |A_1| + |A_2-A_1|, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

而 $A_2=(A_2-A_1)\cup(A_1\cap A_2)$，$(A_2-A_1)\cap(A_1\cap A_2)=\varnothing$，故又有

$$|A_2| = |A_2 - A_1| + |A_1 \cap A_2|. \tag{3}$$

把(3)式代入(2)式，便得证(1)式对 $m=2$ 成立，即有

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

作归纳假设，(1)式对 $m \leqslant n$ 成立．下证(1)式对 $m=n+1$也成立．记 $S_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，则

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} = S_1 \cup A_{n+1}.$$

因而

$$|A| = |S_1| + |A_{n+1}| - |S_1 \cap A_{n+1}|. \tag{4}$$

再由归纳假设，

$$\begin{aligned}|S_1| &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned} \tag{5}$$

另一方面，由归纳假设，又有

$$\begin{aligned}|S_1 \cap A_{n+1}| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\ &= |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

把上式及(5)式代入(4)式，得

$$\begin{aligned}|A| &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n+1} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

□

容斥原理中的公式(1)称为容斥公式．容斥原理是计数

方法中的一条重要原理. 西尔维斯特(J. J. Sylvester, 1814～1897)创立这个原理. 其后, 庞加莱(H. J. Poincare′, 1854～1912)把这一原理推广到概率论, 得到概率论的一般加法公式, 也称庞加莱公式.

应当指出, 在容斥公式中, 如果诸项 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两不交, 即化为加法公式, 故它是加法公式的推广, 因而也称为**一般加法公式**. 一般加法公式与加法公式的区别在于, 把集合 A 分成子集 $A_1, \cdots, A_m$ 时, 前者不要求它们两两不交, 而后者则要求它们两两不交. 把集合 A 分成子集 $A_1, \cdots, A_m$, 而且要求它们两两不交, 这样的分组方法称为对 A 进行**完全分组**, 否则称为对 A 进行**不完全分组**.

[例 1] 某班学生参加数理化三科考试, 数、理、化优秀的学生依次分别有 30 人、28 人、25 人; 数理、理化、数学化学两科都优秀的依次分别有 20 人、16 人、17 人; 数理化三科全优的有 10 人. 问: 数理两科至少有一科优秀的有多少人? 数理化三科至少有一科优秀的有多少人?

解 以 A_1、A_2、A_3 依次表示数、理、化成绩优秀的学生组成的集合. 由容斥原理, 数理两科至少有一科优秀的学生数为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &= 30 + 28 - 20 = 38.\end{aligned}$$

数理化三科至少有一科优秀的学生数为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ &\quad - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 30 + 28 + 25 - 20 - 16 - 17 + 10 = 40.\end{aligned}$$

这里也可用图解法. 图 5-2 的长方形内部代表全班学生

组成的集合，三个圆的内部分别代表班上数学优秀、物理优秀、化学优秀的学生组成的集合．这种图称为文恩图(Venn diagram)．现先在三个圆的公共部分填上三科全优的人数 10；再根据数理、理化、数学化学两科都优秀的人数填写旁边三块的数字 10、6、7；最后根据数、理、化优秀的人数填写外围三块的数字 3、2、2．(为什么这样填？)从图中看出，数理至少有一科优秀的有 38 人，数理化至少有一科优秀的有 40 人． □

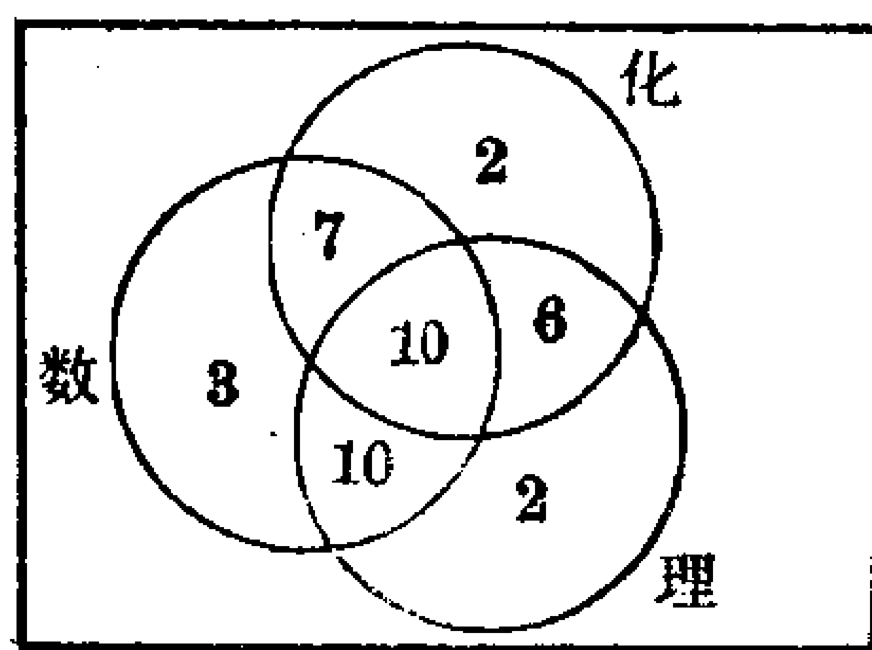


图 5-2

集合论、数理逻辑、概率论的一些公式常用文恩图说明，其优点是直观，但不能代替证明．

[例 2] 1 至 10^6 的整数中，至少能被 3、5、7 之一整除的有多少个？

解 满足题设的整数全体记为 A．按能被 3、5、7 整除把 A 分为三组：A_3、A_5、A_7．其中 A_k 代表能被 k 整除的整数全体(1 至 10^6)．则 $A=A_3\cup A_5\cup A_7$，由容斥公式

$$\begin{aligned}|A|&=|A_3\cup A_5\cup A_7|\\&=|A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_3\cap A_5|\\&\quad-|A_3\cap A_7|-|A_5\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|.\end{aligned}$$

以 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．容易算得，

$$|A_3|=\left[\frac{10^6}{3}\right]=333333,$$

$$|A_5|=\left[\frac{10^6}{5}\right]=200000,$$

$$|A_7|=\left[\frac{10^6}{7}\right]=142857,$$

$$|A_3\cap A_5|=\left[\frac{10^6}{15}\right]=66666,$$

以及

$$|A_3\cap A_7|=47619,$$

$$|A_5\cap A_7|=28571,$$

$$|A_3\cap A_5\cap A_7|=9523.$$

代入上式，即得 $|A|=542857$. □

［例 3］ 有甲、乙两副纸牌，各有 n 张编号自 1 至 n 的牌. 把牌洗过，然后配成 n 对，每对甲乙牌各 1 张. 如果同一对的两张牌同号，就说有 1 个相合.

i. 至少有 1 个相合的配牌方法有多少种？

ii. 没有相合的配牌方法有多少种？

解 所有配牌方法全体记为 S，满足 i、ii 的配牌方法全体依次记为 A、B，则有 $S=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$.

i. 把 A 分为 n 组. A_i: i 号牌相合的配牌方法全体，$i=1, 2, \cdots, n$. 显然 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. A_i 中的配牌方法可如下得到：i 号牌相合，然后把乙牌的其余 $n-1$ 张牌在甲牌的 $1, 2, \cdots, i-1, i+1, i+2, \cdots, n$ 上随意排列，放在一起的配对. 故有 $|A_i|=(n-1)!$, $i=1, 2, \cdots, n$. 同理，$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$, $1\leqslant i<j\leqslant n$; $|A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)!$, $1\leqslant i<j<k\leqslant n$; $\cdots$; $|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=0!=1$. 再由容斥公式(1)，

$$\begin{aligned}|A|&=C_n^1\cdot(n-1)!-C_n^2\cdot(n-2)!\\&\quad+C_n^3\cdot(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cdot 0!\\&=(n!)\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\right.\\&\quad\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

ii. 因 $S=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，故由加法公式，$|S|=|A|$

$+|B|$，即 $|B|=|S|-|A|$. 易知 $|S|=n!$，所以

$$|B|=(n!)\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).\quad\square$$

例 3 的问题 i 是所谓耦合问题，问题 ii 是所谓错位问题，它们有相应的概率含义. 1708 年蒙特莫特(P. R. Montmort)首先提出并解决了耦合问题. 其后，欧拉、拉普拉斯(P. S. M. de Laplace)等人给出种种有趣的推广.

在求解例 3 之 ii 时，事实上用到了下面的

逐步淘汰原理 设 S 为集合，A_i 为 S 的子集，$i=1, 2, \cdots, m$. 记 $\overline{A}_i=S-A_i$，则

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|&=|S|-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|\\&+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\&+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}\tag{6}$$

证明 因 $S=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\cup(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m)$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$ 与 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m$ 不交，故由加法公式

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|,$$

再由容斥公式(1)，便得公式(6). $\square$

顺便指出，由逐步淘汰原理也可推出容斥原理，读者可自证之. 应用容斥原理、逐步淘汰原理求 $|A|$，不同处在于，前者是对 A 进行不完全分组，后者是对 $\overline{A}$(A 关于 S 的余集)进行不完全分组(为什么?)；而共同点则是，不但要求分成的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 本身容易计数，而且它们之中任意两个，三个，直至 m 个的交集也容易计数.

公式(6)也称为筛公式，因为它与数论中的筛法联系在一起. 公元前三世纪，古希腊的埃拉托色尼(Eratosthenes)指

出，只要知道不超过$\sqrt{n}$的所有素数p_i，就能求出n以内的全部素数．方法是：从2到n的整数表中，划掉不超过$\sqrt{n}$的所有素数$p_i(i=1, 2, \cdots, k_n)$的倍数$2p_i, 3p_i, 4p_i, \cdots$，剩下来的就是不超过n的素数．这些素数p_i好象筛眼，把不是素数的数筛掉．对于计数问题，关心的是过了筛子后还剩下多少个素数．

[例4]　2至120中有多少个素数?

解　2至120的整数集合记为S，$|S|=119$．不超过$\sqrt{120}$的素数有4个：2，3，5，7．以$\pi(n)$记不超过n的素数的个数，以A_i记S中i的倍数全体．于是$\overline{A}_i$表示S中不是数i的倍数全体．因此$\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7$中的数都是素数．但素数2，3，5，7不在$\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7$中，所以

$$\pi(120)=4+|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7|.$$

容易算得，$|A_2|=60$，$|A_3|=40$，$|A_5|=24$，$|A_7|=17$；$|A_6|=20$，$|A_{10}|=12$，$|A_{14}|=|A_{15}|=8$，$|A_{21}|=5$，$|A_{35}|=3$；$|A_{30}|=4$，$|A_{42}|=2$，$|A_{70}|=|A_{105}|=1$；$|A_{210}|=0$．由筛公式(6)，有

$$\begin{aligned}|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7|=&|S|-(|A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|)\\&+(|A_6|+|A_{10}|+|A_{14}|+|A_{15}|+|A_{21}|+|A_{35}|)\\&-(|A_{30}|+|A_{42}|+|A_{70}|+|A_{105}|)+|A_{210}|,\end{aligned}$$

代入上述数值，可得

$$\pi(120)=4+|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7|=4+26=30. \qquad \square$$

[例5]　把编号自1至r的r个球分放进编号自1至n的n个盒里$(r\geqslant n)$，每盒球数不限．求没有空盒的放法种数$f(r, n)$．又，设n个盒不加区别，求没有空盒的放法种数$S(r, n)$．

解　以S记r球分放n盒的放法全体，以A记没有空盒

的放法全体，则 $\overline{A}$ 表示有空盒的放法全体．把 $\overline{A}$ 分为 n 组．A_i: i 号盒是空盒的放法全体，$i=1, 2, \cdots, n$. $\overline{A}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即有 $A=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$，其中 $\overline{A}_i$ 则表示 i 号盒不空的放法全体．

先算 $|S|$．S 中的放法可用 r 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 表示：i 号球放进 a_i 号盒，$i=1, 2, \cdots, r$．由于每一球都有 n 盒可选用，故 $|S|=n^r$．再算 $|A_i|$．因 i 号盒是空盒，故每个球应放在其他的 $n-1$ 盒，有 $n-1$ 个盒可选用，所以 $|A_i|=(n-1)^r$，$i=1, 2, \cdots, n$. 同理，$|A_i\cap A_j|=(n-2)^r$，$1\leqslant i<j\leqslant n$. 一般地，当 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_l\leqslant n$ 时，$|A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_l}|=(n-l)^r$，$l=3, 4, \cdots, n$．最后，由筛公式(6)，有

$$\begin{aligned} f(r, n)=|A|&=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| \\ &=n^r-C_n^1(n-1)^r+C_n^2(n-2)^r \\ &\quad -C_n^3(n-3)^r+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \end{aligned}$$

如果 n 个盒不加区别，没有空盒的放法种数 $S(r, n)$ 与上面的 $f(r, n)$ 有如下关系，$f(r, n)=n!S(r, n)$．从而

$$\begin{aligned} S(r, n)=\frac{1}{n!}[&n^r-C_n^1(n-1)^r+C_n^2(n-2)^r+\cdots \\ &+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}]. \end{aligned}$$ □

［例6］ 上届获得前 n 名的 n 个球队参加本届争夺前 n 名的比赛，如果不设并列名次，问：没有一个队取得的名次恰好紧接在上届比他高一个名次的球队之后的比赛结果有多少种可能？

解 以 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示本届的比赛结果：上届第 i 名(记为第 i 号)球队在本届获得 a_i 名，$i=1, 2, \cdots, n$．每种比赛结果即是自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一种排列．以 S 记比赛的可能结果全体，则 $|S|=n!$．符合题设的

比赛结果全体记为 A, 则 $\overline{A}$ 表示至少有某个 $i+1$ 号队恰比 i 号队低一名次. 把 $\overline{A}$ 分为 $n-1$ 组. A_i: $i+1$ 号队比 i 号队低一名次的比赛结果全体, $i=1, 2, \cdots, n-1$. 则 $\overline{A}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}$, 即有 $A=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{n-1}$.

A_i 中的比赛结果相当于 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的排列, 但 $i+1$ 紧接在 i 之后. 这种排列方法可由 $1, 2, \cdots, i-1, i+2, i+3, \cdots, n$ 这 $n-2$ 个数及数对 $(i, i+1)$ 共 $n-1$ 个元素的排列得到, 故 $|A_i|=(n-1)!$, $i=1, 2, \cdots, n-1$. $A_i\cap A_j$ 中的比赛结果, 当 $i+1<j$ 时, 可以看作由 2 个数对 $(i, i+1)$、$(j, j+1)$ 及其余 $n-4$ 个数共 $n-2$ 个元素排列而成; 当 $i+1=j$ 时, 可以看作由 3 元有序数组 $(i, i+1, i+2)$ 及其余 $n-3$ 个数共 $n-2$ 个元素排列而成. 因此, $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$, $1\leqslant i<j\leqslant n$. 一般地, 可算得 $|A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_l}|=(n-l)!$, $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_l\leqslant n-1$. 由筛公式,

$$\begin{aligned}|A|&=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{n-1}|\\&=n!-C_{n-1}^1(n-1)!+C_{n-1}^2(n-2)!+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}.\end{aligned}$$

□

前面五节介绍的是计数的基本原理和基本方法: 乘法原理、加法原理、配对原理、容斥原理和枚举法、分步法、分组法、配对法. 对于不太复杂的计数问题, 可以考虑采用上述方法, 并不妨按下述顺序进行:

1. 大致估计一下要计数的集合中的元素的多寡. 如果不太多, 可以穷举所有元素(如本书第 1 页例 1、第 4 页例 4), 即用枚举法; 如果不少, 但元素的分布有比较明显的规律可寻(如本书第 2 页例 2, 第 3 页例 3), 则也可用枚举法; 如果很多又不易看出某种规律, 则只有另觅他法.

2. 考虑用配对法或分步法. 通过配对, 把要解决的计数

问题转化为已经解决或较易于解决的另一计数问题；通过分步，把一个比较复杂的"全过程"分解为几个连接进行的较简单的"分过程".

3. 考虑用分组法. 为了求 $|A|$，先考虑对 A 进行完全分组，并用加法公式；若有困难，转而考虑对 A 进行不完全分组，并用一般加法公式，即容斥公式；若又有困难，再考虑对 A 的余集 $\overline{A}$ 进行不完全分组，并用筛公式.

练 习 五

1. 在编号自 1 至 n 的 n 张纸片中作有放回的逐一抽样，共抽取 r 次. 求 1 至 m 号纸片都被取过的抽样序列的种数. 设 $m \leqslant r$. 如果改为无放回抽样，答案如何?

2. 有 m 种颜色的纸片各 n 张，并各自 1 至 n 编号. 在这 $n\times m$ 张纸片中作无放回的逐一抽样，共抽取 r 张 $(r\geqslant n)$，求 n 种号码都被抽取到的抽样方法种数.

3. 121 至 224 的整数中，有多少个素数?

4. 1 至 2000 的整数中，至少能被 2、3、5 中的两个数同时整除的数有多少个?能且只能被 2、3、5 中的一个数整除的有多少个?

5. 由数字 1 至 9 组成且每种数字至少出现一次的 n 位数有多少个?

6. 在本书第 34 页例 3 中，问：恰好有 r 对牌相合的配牌方法有多少种?

7. 1 至 10^6 中，有多少个整数不能写成整数的平方且也不能写成整数的立方?

8. 设整数 $n\geqslant 2$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ 是 n 的素因子分解式，以 $\varphi(n)$ 记小于 n 且与 n 互素的自然数的个数，证明

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

9. 4 个黑球、3 个白球、2 个红球排成一列，但不能让任何一种颜色的球全部排在一起，有多少种排法?假定同色球不加区别.

10. 有 n 对夫妻 $(n\geqslant 3)$ 围坐在一圆桌边的 $2n$ 个依反时针顺序编号为 1, 2, 3, …, $2n$ 的座位上. 求男女相间、夫妻不相邻的坐法种数.

六、折线法与反射原理

在 xOy 平面上，直线 $x=0$，±1，±2，…；$y=0$，±1，±2，…组成正方形网．这些直线的交点就是格点．从某一格点(a,b_0)出发，画斜率为 1 或 -1 的线段到点$(a+1, b_0+1)$或点$(a+1, b_0-1)$；再由所得线段的右端点$(a+1, b_1)$出发，画斜率为 1 或 -1 的线段到点$(a+2, b_1+1)$或点$(a+2, b_1-1)$；等等，一直画到某一格点$(a+n, b_n)$，这样便得到一条折线(图 6-1)．点(a, b_0)称为这条折线的起点，点$(a+n, b_n)$为终点，每一个小方格中的对角线称为这条折线的一节．

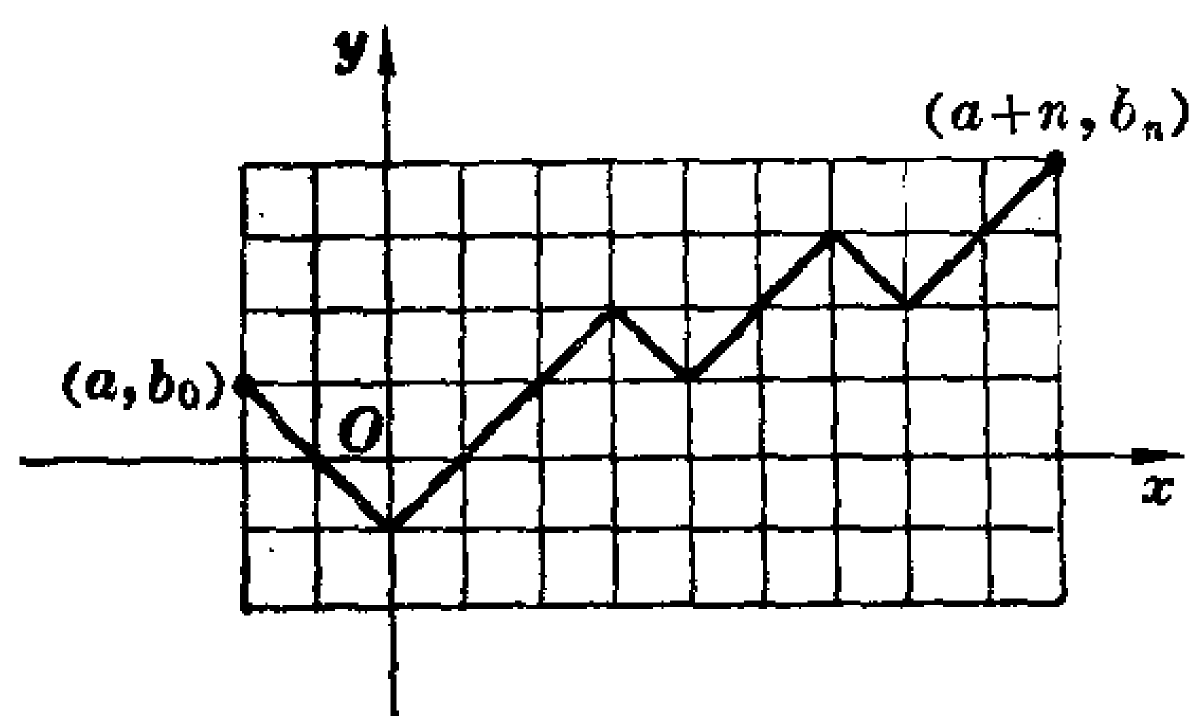


图 6-1

关于折线，有

1．平面上两个格点(a, b_0)与$(a+n, b_n)$能用折线联结的充分必要条件是

$$|b_n-b_0|\leqslant n \text{ 而且 } n+b_n-b_0 \text{ 是偶数}. \qquad (1)$$

证明略．

2．如果格点(a, b_0)与$(a+n, b_n)$适合(1)式，则联结这两点的折线条数

$$h=C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}. \qquad (2)$$

证明 由这两点的坐标数知道，这种折线有 n 节，其中有

$n_1=\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)$ 节斜率为 1, $n-n_1$ 节斜率为 -1, 而且这种折线全体与 n_1 个 1 及 $n-n_1$ 个 -1 的排列方法全体一一对应. 后者的排列数等于 $C_n^{n_1}$, 因此 $h=C_n^{n_1}$. □

给定集合 A, 设法把 A 中的元素与 xOy 平面上的某些折线配对, 于是把计算 $|A|$ 的问题转化为计算折线的条数. 这种计数方法, 就是**折线法**, 也称**路径法**, 其实质是一种配对法. 折线法是一种计数技巧, 常用在计算古典概率.

在折线法中, 下面的定理是基本的.

反射原理 设 $b_0>0$, $b_n>0$. 从点 (a, b_0) 出发, 并与 x 轴相交, 最后到达点 $(a+n, b_n)$ 的所有折线(记为 A)的条数等于从点 $(a, -b_0)$ 出发到达点 $(a+n, b_n)$ 的所有折线(记为 B)条数. 即 $|A|=|B|$.

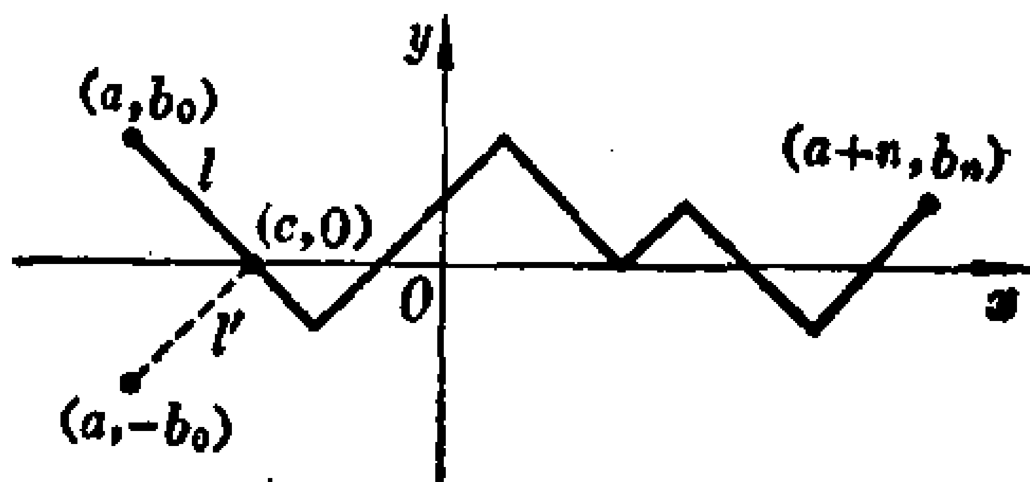


图 6-2

证明 如图 6-2. 设 l 是 A 中的折线, 它与 x 轴第一次(自左到右数)相交于点 $(c, 0)$. 作折线 l': 自点 $(a, -b_0)$ 至点 $(c, 0)$ 这一段与 l 自点 (a, b_0) 至点 $(c, 0)$ 的一段关于 x 轴对称(即是 l 关于 x 轴的反射), 自点 $(c, 0)$ 至点 $(a+n, b_n)$ 则与 l 重合. 折线 l' 属于 B. 令 l 与 l' 配对, 不难知道, 按此法建立了 A 与 B 的一一对应. 所以 $|A|=|B|$. □

反射原理的推论 设 $b_0>0$, $b_n>0$, 则

1. 联结点 (a, b_0) 与点 $(a+n, b_n)$ 且与 x 轴相交的折线条数

$$f=C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n+b_0)}. \tag{3}$$

2. 联结点 (a, b_0) 与点 $(a+n, b_n)$ 且与 x 轴不交的折线条

数

$$g=C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}-C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n+b_0)}. \tag{4}$$

证明 由反射原理及公式(2)，即得(3)式. 由加法公式及公式(2)，有 $C_n^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}=f+g$，再由(3)式，从而得(4)式. □

[例 1] 甲、乙两人参加竞选，甲得 m 张选票，乙得 n 张选票，$m>n$. 问：在对 $m+n$ 张选票逐一唱票的过程中，甲得的票数始终一直领先的点票记录有多少种可能？

解 点票记录用 $m+n$ 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{m+n})$ 表示，当第 k 次唱票时是甲得的选票，则取 $a_k=1$，是乙得的选票，则取 $a_k=-1$，$k=1, 2, \cdots, m+n$. 令

$$b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k, \quad k=1, 2, \cdots, m+n.$$

得数列 $b_1, b_2, \cdots, b_{m+n}$. 自左到右依次联结下列格点

$$(1, b_1), (2, b_2), \cdots, (k, b_k), \cdots, (m+n, b_{m+n}),$$

得一条含 $m+n-1$ 节的折线 l. 因甲的票数一直领先，故对任一 k，$b_k>0$. 特别地，$b_1=1$，$b_{m+n}=m-n$. 因此，折线 l 是一条联结点 $(1, 1)$ 与点 $(m+n, m-n)$ 且与 x 轴不交的折线，具有这种性质的折线全体记为 B. 以 A 记符合题设的点票记录全体，则 A 与 B 一一对应，故 $|A|=|B|$. 由公式(4)，有

$$|A|=|B|=C_{m+n-1}^{m-1}-C_{m+n-1}^{m}=\frac{m-n}{m+n}C_{m+n}^{m}. \qquad □$$

例 1 是组合分析中有名的选举问题(也称投票问题)，所得到的结论称为选举定理. 选举问题在历史上曾引起人们的极大兴趣. 从例 1 的证明可以看到，应用折线法求 $|A|$，关键之处首先在于构造可以用来代表 A 中元素的折线，然后根据这种折线的特点进行计数.

[例 2] 从装有 $n-1$ 个白球和 $n-1$ 个黑球的袋里逐一

取出所有 $2n-2$ 个球，使得每次取球后，留在袋里的黑球不少于白球．假设同色球没有区别，求所有取法(记为 A)的种数．

解 以 $2n-1$ 元有序数组 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2n-2})$ 表示取球方法．其中 $a_0=0$；当第 k 次取出白球时，$a_k=1$；取出黑球时，$a_k=-1$．令

$$b_k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k, \qquad (k=0, 1, 2, \cdots, 2n-2)$$

则有 $b_0=0$, $b_{2n-2}=0$．取球方法属于 A 当且仅当 $b_k\geqslant 0$, $k=1, 2, \cdots, 2n-3$．作依次联结下述点列

$$(0, 0), (1, b_1), (2, b_2), \cdots, (2n-3, b_{2n-3}), (2n-2, 0)$$

的折线 l．因 $b_k\geqslant 0$，故 l 落在上半平面 $y\geqslant 0$．以直线 $y=-1$ 为 x' 轴(图 6-3)，则折线 l 对于坐标平面 $x'O'y$ 来说，是一条以 $(0, 1)$ 为起点、$(2n-2, 1)$ 为终点且与 x' 轴不相交的折线．这种折线全体(记以 B)按上面的方法与 A 一一对应，故 $|A|=|B|$．由公式(4)，

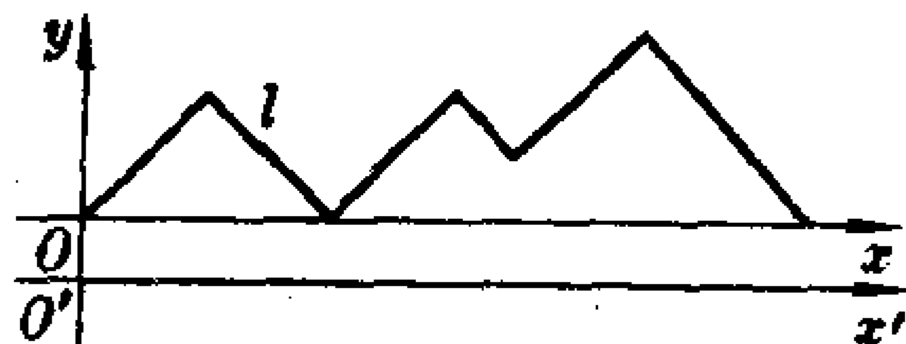


图 6-3

$$|A|=C_{2n-2}^{n-1}-C_{2n-2}^{n}=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}. \qquad \square$$

数列 $\left\{\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}, n=1,2,3,\cdots\right\}$ 称为卡塔朗(E. C. Catalan)数，它有许多组合意义．比如，由练习三的第 5 题及本书第 20 页例 8 可得，凸 $n+1$ 边形的三角形剖分方法种数、n 个指定了顺序的实数的乘积结合方式种数，都等于卡塔朗数 $\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$．卡塔朗数的前 10 项是 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862.

在折线法中，下面的原理也常用．

对偶原理 设 $b_n>b_0$．在以 (a, b_0) 为起点、$(a+n, b_n)$ 为

终点的折线中，以 A 记所有在 $x=a+n$ 处第一次到达直线 $y=b_n$ 的折线集合，以 B 记所有自离开点 (a, b_0) 后从未回到直线 $y=b_0$ 的折线集合，则有 $|A|=|B|$.

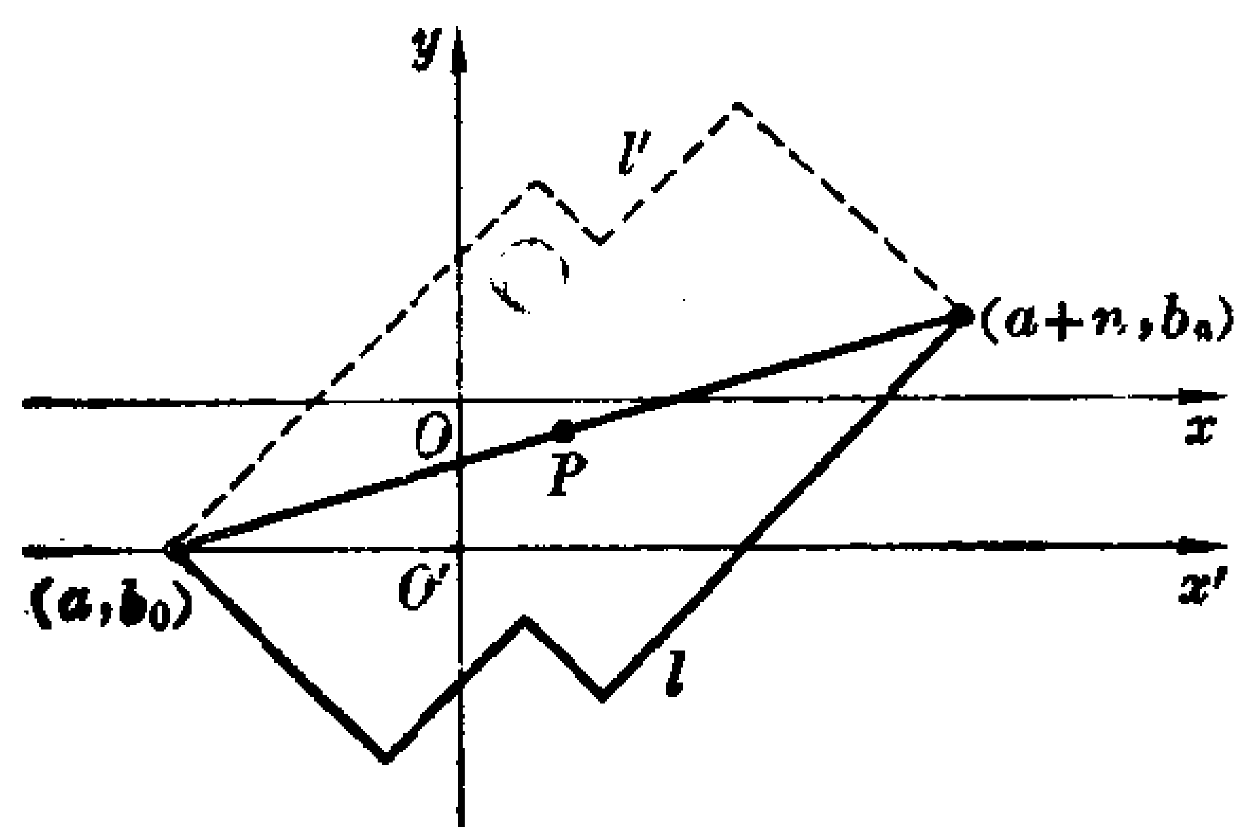


图 6-4

证明 如图 6-4. 设 l 是 A 中的一条折线. 取点 (a, b_0) 与点 $(a+n, b_n)$ 的联线的中点 P，令 l 绕 P 旋转 $180°$，得折线 l'，则 l' 属于 B. 令 l 与 l' 配对，则 A 与 B 一一对应，故有 $|A|=|B|$. □

对偶原理的推论 设 $b_n>b_0$. 以 (a, b_0) 为起点、$(a+n, b_n)$ 为终点且在 $x=a+n$ 处第一次到达直线 $y=b_n$ 的折线条数

$$p=C_{n-1}^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0-2)}-C_{n-1}^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}. \tag{5}$$

证明 A、B 如对偶原理中所设. 由对偶原理，$p=|A|=|B|$. 取直线 $y=b_0$ 为 x' 轴(图 6-4). 以 E 记自 $x'O'y$ 平面的点 $(a+1, 1)$ 出发到达点 $(a+n, b_n-b_0)$ 且与 x' 轴不相交的折线全体，$|B|=|E|$. 但由反射原理的推论，又有

$$p=|E|=C_{n-1}^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0-2)}-C_{n-1}^{\frac{1}{2}(n+b_n-b_0)}. \qquad \square$$

[例 3] 设质点 M 在 x 轴上的整数点 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ 移动，每过单位时间向左或向右移动 1 个单位. 求质点 M 从点 0 出发经 $m+n$ 单位时间第一次到达点 $m-n$ $(m>n>0)$ 的移动方法(其全体记为 A)种数.

解 质点 M 的转移方法可用 $m+n$ 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_{m+n})$ 表示：当第 k 次移动时，质点向右移动则取 $a_k=1$，向

左移动则取 $a_k=-1$. 令

$$b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k, \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m+n)$$

并作联结下述点列的折线 l:

$$(0,\ 0),\ (1,\ b_1),\ (2,\ b_2),\ \cdots,$$
$$(m+n-1,\ b_{m+n-1}),\ (m+n,\ m-n).$$

以 B 记从点$(0,0)$出发,并在 $x=m+n$ 处第一次到达 $y=m-n$ 的折线全体, 则 l 属于 B. 按此配对方法, A 与 B 一一对应,因此$|A|=|B|$. 由对偶原理的推论,得

$$|A|=|B|=C_{m+n-1}^{m-1}-C_{m+n-1}^{m}=\frac{m-n}{m+n}C_{m+n}^{m}. \qquad \square$$

例 3 与例 1 乍看起来毫不相干, 却有相同的答数. 是巧合吗?不是. 例 3 可改写成: "甲、乙两人竞选,甲得 m 票,乙得 n 票, $m>n>0$, 求在对 $m+n$ 张选票逐一唱票的过程中,只在最后一次唱票后, 甲所得票数与乙所得票数之差才第一次达到 $m-n$ 票的点票记录的种数."如上所知, 与选举问题的答数一样. 因此,有人把例 1 的结论称为选举定理的第一种形式, 把例 3 (改用选举的语言)的结论称为选举定理的第二种形式. 它们可以通过对偶定理互相推出,是一对"对偶"的定理.

[例 4] 甲、乙两人打乒乓球,打成 20:20. 问:在比赛过程中,除中途恰有一次比分相等外, 甲都领先的比分序列(其全体记为 A)有多少种?

解 设 A 中的比分序列 t 为 $m_k:n_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 40)$. 令 $b_k=m_k-n_k$,则 $b_{40}=0$. 让 t 与联结下述点列

$$(0,\ 0),\ (1,\ b_1),\ (2,\ b_2),\ \cdots,\ (39,\ b_{39}),\ (40,\ 0)$$

的一条折线 l 对应. 以 B 记除起点$(0,\ 0)$、终点$(40,\ 0)$外,与 x 轴恰有一个交点且落在上半平面的折线全体, 则 l 属于

B. 按上法，A 与 B 一一对应，故 $|A|=|B|$.

以 E 记除起点 $(0,0)$、终点 $(40, 0)$ 外，与 x 轴没有其他交点且落在上半平面的折线全体. 因 E 中的折线必过点 $(1, 1)$ 与点 $(39, 1)$，故由反射原理的推论，

$$|E|=\frac{1}{39}C_{39}^{20}.$$

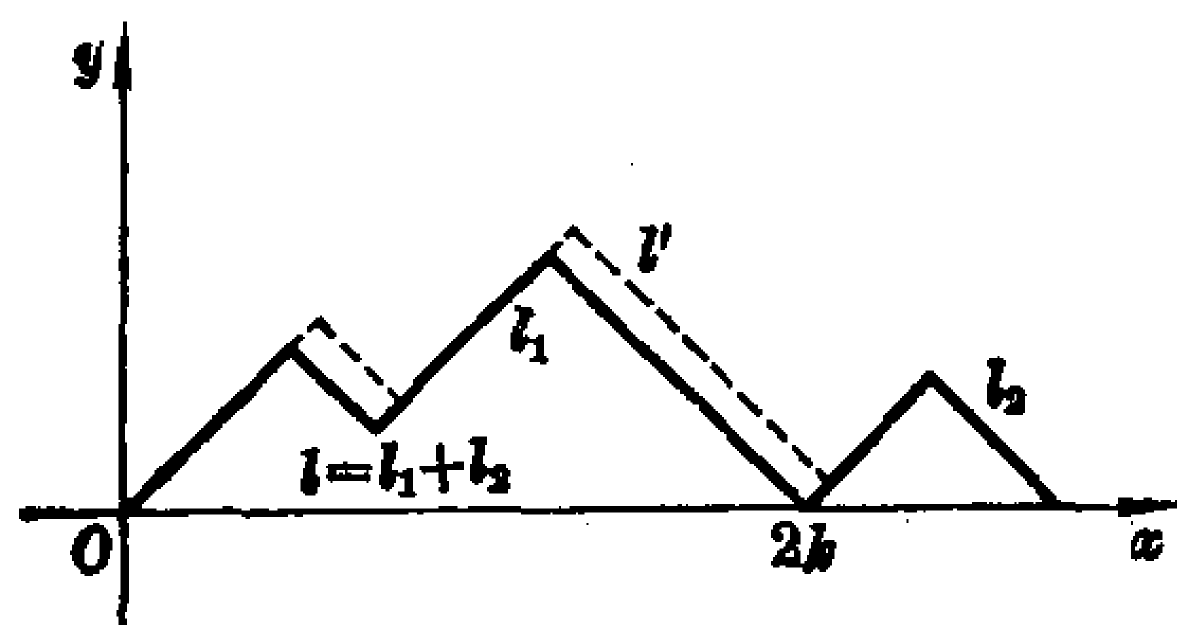


图 6-5

下证 $|B|=|E|$. 设 $l\in B$，且与 x 轴在 $x=2k$ 处相交，此点把 l 分为两段 l_1 与 l_2(图 6-5). 截出 l_2 的头一节，平移 l_1 接在点 $(2k+1, 1)$ 处，然后把截下的那一节补在 $(0, 0)$ 至 $(1, 1)$ 这个位置上. 这样得到的折线 l' 属于 E. 令 l' 与 l 配对，此配对法记为 φ. 反过来，设 $l'\in E$. l' 至少有两次到达直线 $y=1$. 第一次在点 $(1, 1)$，设第二次在点 $(2k+1, 1)$. 这两点把 l' 分成 l'_1、l'_2、l'_3(图 6-6). 先把 l'_1 移开，平移 l'_2 接在点 $(0,0)$，然后把 l'_1 补在点 $(2k, 0)$ 至 $(2k+1, 1)$ 的位置上. 这样得到的折线 l 属于 B，且按配对法 φ，l' 与 l 配对. 因此，E 与 B 一一对应，从而 $|A|=|B|=|E|=\dfrac{1}{39}C_{39}^{20}$. □

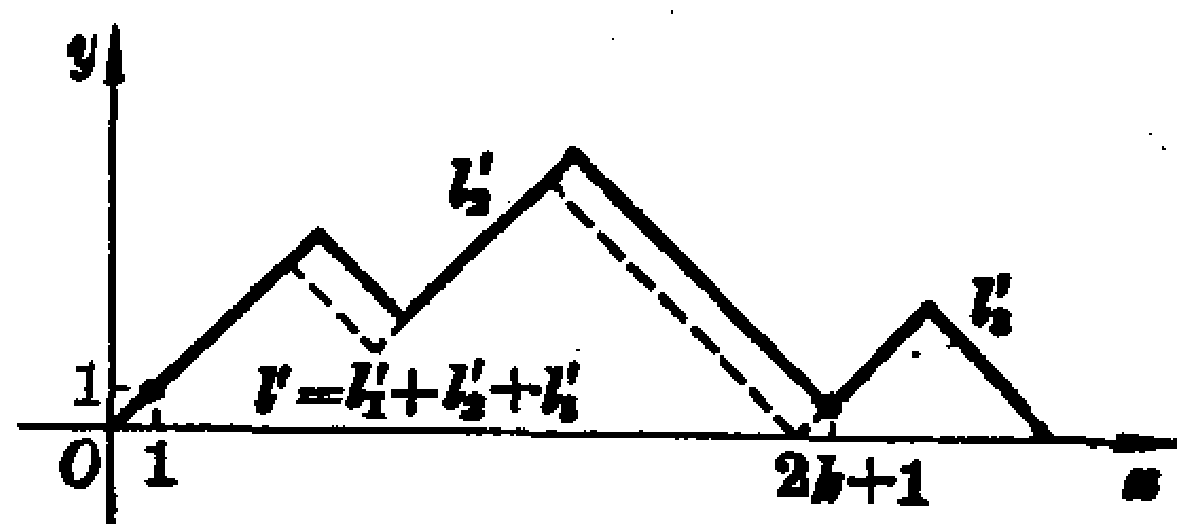


图 6-6

本书第 120 页练习六第 9 题的解答概要将给出例 4 的另一种解法.

[例 5] 设整数 n、$r\geqslant 1$. 证明组合公式

$$C_{n+r}^{r-1}+C_{n+r-1}^{r-1}+C_{n+r-2}^{r-1}+\cdots+C_{r}^{r-1}+C_{r-1}^{r-1}=C_{n+r+1}^{r}. \quad (6)$$

证明 考虑从点 $(0, 0)$ 到点 $P=(n+r+1, -n+r-1)$

的折线全体 A. 由公式(2), $|A|=C_{n+r+1}^{r}$. 把 A 分为 $n+2$ 组(图 6-7). A_1: 折线到达点 $P_1=(r-1, r-1)$后, 即往点 (r, r), 然后沿直线直达点 P, 有 $|A_1|=C_{r-1}^{r-1}$; A_2: 折线到达点 $P_2=(r, r-2)$后, 即往点$(r+1, r-1)$, 然后沿直线直达点 P, 有 $|A_2|=C_{r}^{r-1}$; 一般地, $A_k(3\leqslant k\leqslant n+1)$: 折线到达点 $P_k=(r-2+k, r-k)$后, 即往点$(r-1+k, r+1-k)$, 然后沿直线直达点 P, 有 $|A_k|=C_{r-2+k}^{r-1}$; A_{n+2}: 折线到达点 $P_{n+2}=(n+r, -n+r-2)$后, 即往点 P, 有 $|A_{n+2}|=C_{n+r}^{r-1}$. 因 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n+2}$, 由加法公式, $|A|=C_{n+r}^{r-1}+C_{n+r-1}^{r-1}+\cdots+C_{r}^{r-1}+C_{r-1}^{r-1}$, 从而(6)式成立. □

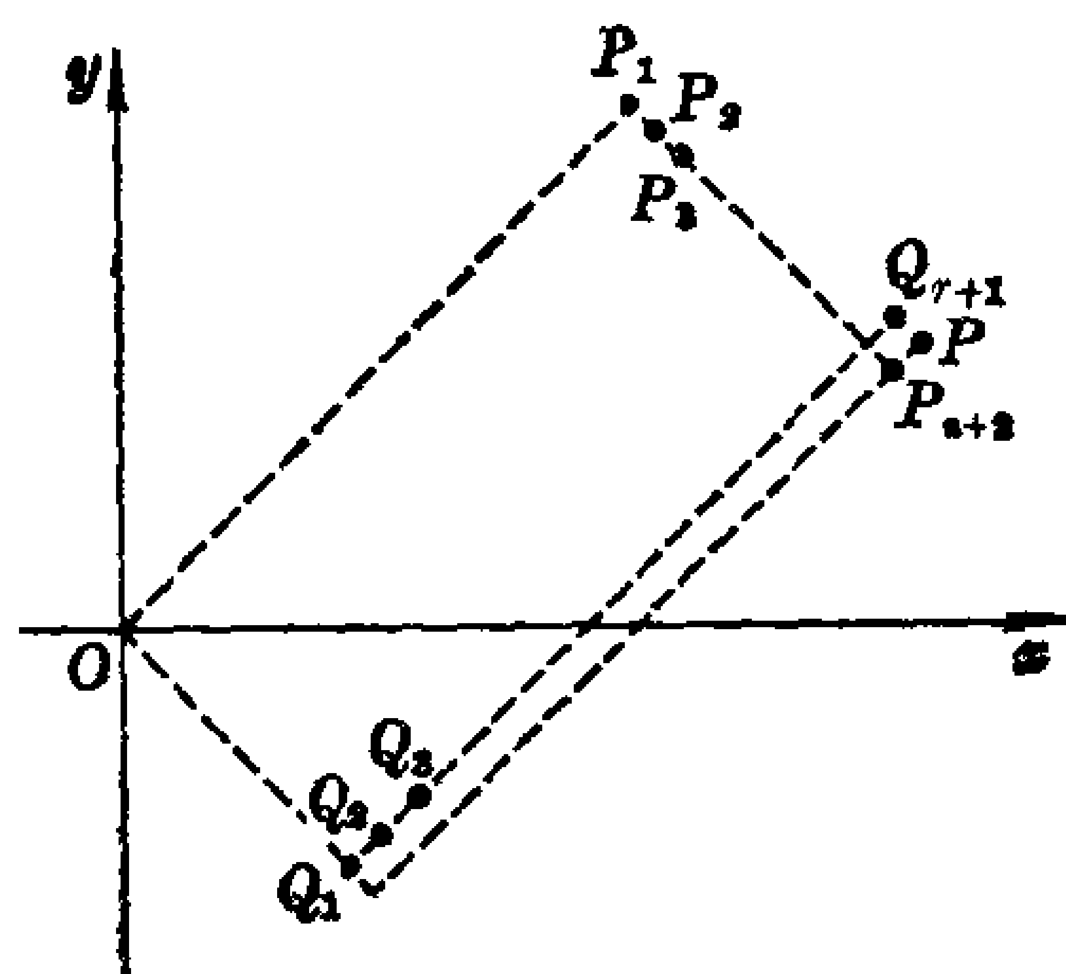


图 6-7

如图 6-7, 假若把 A 中的折线按过点 Q_1、Q_2、…、Q_{r+1} 分组, 则可得另一组合公式.

练 习 六

1. $2n$ 人排队买票, 每票一角, 每人限买 1 张. 这 $2n$ 人中, 只带 1 张一角的及只带 1 张二角的各有 n 人. 开始售票时, 售票处没有零钱找补. 问: 使得大家都能顺利买票, 不致发生找补零钱的困难的排队方法有多少种?

2. 上题中, 若售票处备有 3 张一角的, 则答案如何?

3. 以 A 表示方程 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n}=n$ 满足约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_j<\frac{1}{2}j\,(1\leqslant j\leqslant 2n-1)$ 及 $0\leqslant x_j\leqslant 1\,(1\leqslant j\leqslant 2n)$ 的整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$全体, 求 $|A|$.

4. 甲有 m 粒豆子, 乙有 $m+2n$ 粒豆子 $(m, n\geqslant 1)$. 甲、乙两人以丢掷硬币为游戏, 出正面时, 乙给甲 1 粒豆子, 出反面时, 甲给乙 1 粒豆子, 如有某人的豆子输光, 游戏结束. 以 A 记恰好在第 $m+2n$ 次丢掷硬币后, 甲把 m 粒豆子输光的

丢掷序列全体，证明 $|A|=\frac{m}{m+n}C_{m+2n-1}^{n}$.

5. 一质点在 x 轴上的点 0, 1, 2, 3, …上移动，每移一步，向左或向右移 1 单位，但移至点 0 时，就停止在点 0（称点 0 为吸收壁）. 求质点从点 5 出发经过 20 步移动后到达点 3 的转移方法的种数.

6. 上题的点 0 改为弹性壁（即当质点由点 1 移到点 0 时，则下一步必弹回点 1 上），答案如何？

7. 一质点在 x 轴上的点 0, 1, 2, …, 10 上移动，每移一步，向左或向右移 1 单位，但点 0 与点 10 是吸收壁. 求质点从点 1 出发经 26 步转移到点 9 的转移方法的种数 a.

8. 甲、乙打乒乓球，最后甲以 21:16 获胜. 求在比赛过程中甲一直领先的比分序列的种数 f.

9. 证明：起点为 (0, 0)、终点为 $(2n, 0)$，位于 x 轴上方且与 x 轴恰有 $m+1$ 个接触点的折线条数 $f=\frac{m}{2n-m}C_{2n-m}^{n}$，这里 $m\geq 1$.

10. 证明组合数公式 $C_{n+r}^{r}+C_{n+r-1}^{r-1}+\cdots+C_{n+1}^{1}+C_{n}^{0}=C_{n+r+1}^{r}$.

七、 抽屉原理与重迭原理

单位圆片 Γ 中有 8 点，每两点连一线段，其中长度小于 1 的线段全体记为 A. $|A|$ 等于多少？很明显，这与那 8 点的位置有关，所以不能确切地回答. 这时，自然会提出这样的问题：能否给出 $|A|$ 的一个大体的估计？也就是能否找到正整数 k 和 l，使得 $k\leqslant|A|\leqslant l$？如果有，则这样的 k 和 l 分别称为 $|A|$ 的下界和上界. 确定上、下界，是数学里经常遇到的问题. 证明 $|A|\geqslant 1$ 或证明 $|A|=0$，即存在性(存在或不存在)证明，可看作特殊的计数问题. 存在性的证明和上下界的确定，方法多种多样，其中常用的有所谓抽屉原理.

通俗地讲，抽屉原理是：多于 n 个的球分放进 n 个抽屉，则必有一个抽屉至少有 2 个球. 抽屉原理也称为鸽笼原理、鞋盒原理，也叫做狄利克雷(P. G. Dirichlet)原理. 如此简单明了的事实，竟冠以著名德国数学家狄利克雷的大名，似乎有点过份宠爱，但谁又料到，这样一个貌不惊人的不证自明的原理，却有许许多多出人意料的应用.

在本节，$[x]$ 仍表示不超过 x 的最大整数，而 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数. 显然，$[x]\leqslant x\leqslant\lceil x\rceil$，$x-[x]<1$，$\lceil x\rceil-x<1$，而且，当且仅当 x 为整数时 $[x]=\lceil x\rceil=x$.

抽屉原理 m 件东西分成 n 组，一定有一组至少含有 $\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$ 件，也一定有一组至多含有 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 件.

证明 用反证法. 若每组所含件数都不超过 $\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil-1$，

则 n 组就总共不超过 $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]-1\right)$ 件，但 $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]-1\right)<n\cdot\frac{m}{n}=m$，这就导致矛盾．若每组所含件数都不少于 $\left[\frac{m}{n}\right]+1$，则 n 组就总共不少于 $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right)$ 件，但 $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right)>n\cdot\frac{m}{n}=m$，又得出矛盾． □

下面给出数例，说明抽屉原理的应用．

［例 1］ 单位闭圆片（即包括圆周）Γ 中有 8 点，证明其中有一对点，它们的距离小于 1．

证明 为了应用抽屉原理，应设计合适的抽屉．显然，在这里，应把 Γ 分划成若干个区域，每个区域当作一个抽屉，使得每个抽屉里任意两点的距离都小于 1．而且，应保证至少有两个给定点落在同一抽屉．根据这一点，分划 Γ：作与 Γ 同心、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆，余下的圆环用 Γ 的 6 条半径等分成 6 个全等的曲四边形（图 7-1）．取中央的开圆片（即不包括圆周）和这 6 个曲四边形（每个曲四边形只含一条直线边）作为 7 个抽屉．由抽屉原理，必有一个区域至少含有两个给定点，这两点的距离小于 1． □

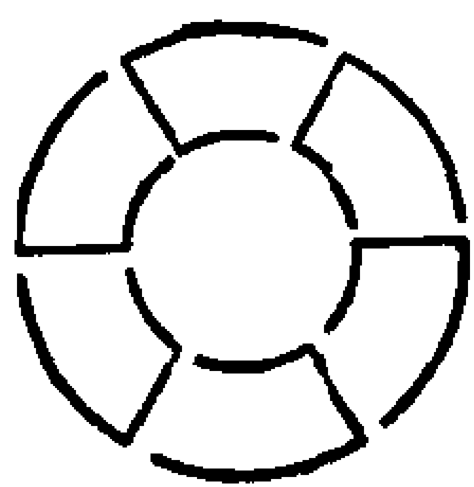


图 7-1

在例 1 中，涉及的数量有三个：条件中的点数 8 长度 1 以及结论中的下界 1．现问：i．点数能否减少？ii．下界能否升高？iii．长度能否减小？

问题 i 的回答是否定的．因为圆周上的 6 个等分点及圆心这 7 个点，每两点的距离都不小于 1．问题 ii 及问题 iii 的回答是肯定的，下面的两个例子可以说明．

［例 2］ 单位闭圆片 Γ 中有 8 点，证明其中必有两对点，每对点的距离都小于 1．而且，在 Γ 中有这样 8 个点，其中有

且仅有两对点，每对点的距离小于1.

证明 仍用例1中设计的抽屉. 若有某抽屉含3个以上的给定点，则结论显然成立. 作假设 P: 每个区域(抽屉)至多含有2个给定点. 分如下三种情形来讨论:

情形1 中央区域不含给定点，即8个点落在6个曲四边形中. 由抽屉原理及假设 P，必有两个曲四边形各含2个给定点，因此结论成立.

情形2 中央区域恰含一个给定点 a. 其余7点落在6个曲四边形中，由抽屉原理及假设 P，必有曲四边形 B 恰含2个给定点，设为 b 及 c，其距离小于1. 给定点不动，沿顺时针方向绕 Γ 的圆心 O 转动抽屉，直至点 b、c 中有一点(不妨设是点 b)落在 B 的直线边上为止(图7-2). 现采用转动后的抽屉. 点 c 仍在 B 中. 若又有另一点进入 B 或另一抽屉也含有两点，则无需再证. 因此可设点 a、b、c 以外的5个给定点 d, e, f, g, h 分别落在曲四边形 D、E、F、G、H 上. 若点 b 不在单位圆周上，则点 d 与点 b 的距离必小于1. 若点 b 在单位圆周上，即点 b 在 B 的尖角上(曲四边形上的直线边与单位圆周的交点)，且点 b、d、e、f、g、h 中任意两点的距离都不小于1，则点 d、e、f、g、h 也都必位于尖角上，但此时点 h 与点 c 的距离小于1.

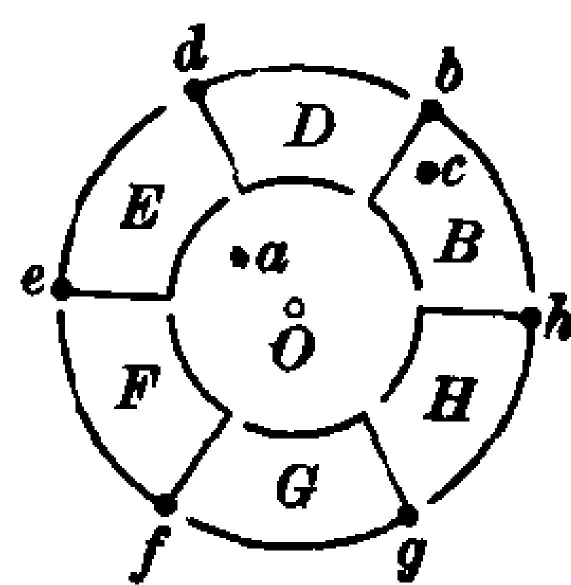


图 7-2

情形3 中央区域恰含2个给定点 a、b，并不妨设点 a 不是圆心. 若另有两点落在同一曲四边形，则得证；若每个曲四边形各含1个给定点，则其中必有一点与点 a 的距离小于1.

取 Γ 的圆心 O 及单位圆周上的6个等分点 a, b, c, d, e, f，并取其中一个等分弧 $\overset{\frown}{ab}$ 的中点 g. 以上8点中恰含两

对点 a, g 及 g, b, 每对点相距小于 1. □

[例 3] 单位闭圆片 Γ 中有 8 点, 证明: 必有一对点, 它们的距离不超过单位圆内接正七边形的一边长 r.

证明 例 1 中的抽屉已不适用, 应重新设计, 使每个抽屉(区域)中任意两点的距离都不超过 r. 为此, 把 Γ 分为 8 个区域: 以点 O 为圆心、r 为直径的闭圆片为一个, 余下的圆环用 7 条半径分为 7 个全等的曲四边形, 且都包括边界(图 7-3). 易知, 每个区域中任意两点的距离不超过 r. 如果 8 个给定点都落在中央区域 D 内, 则已得证. 否则, 设给定点 a 在圆环中. 8 个给定点不动, 绕点 O 旋转抽屉, 使点 a 落在某两个曲四边形 E 及 F 的公共边上. 如 E 或 F 还含有其他给定点, 则已得证. 否则, 除点 a 外的其余 7 个给定点落在除 E 及 F 外的 6 个区域中, 由抽屉原理, 其中有一个区域至少含有一对给定点, 它们相距不超过 r. □

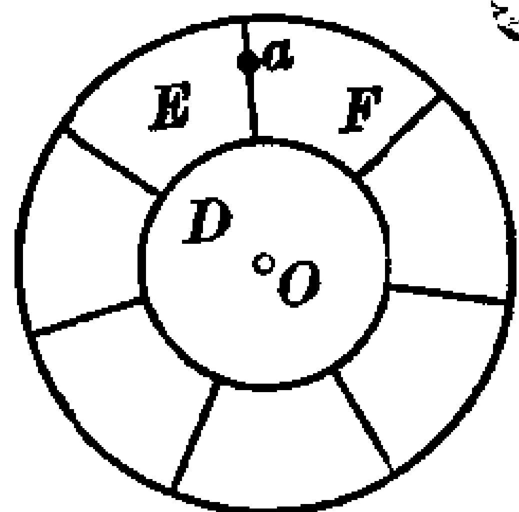


图 7-3

应当指出, 例 3 已无法改进: 若条件不变, 结论不能改进为两对; 若条件中的点数 8 改为点数 7, 则结论不再成立; 另外, 其余不变, 则长度 r 也不能减少.

应用抽屉原理, 重要的在于设计合适的抽屉, 这是解题技巧之所在. 在例 2 与例 3 中, 通过旋转抽屉, 使给定点中的某一点起着两点的作用, 从而使 8 个点可当 9 个点用.

[例 4] 有 6 个点, 任意 3 点不共线, 每两点用一条红色线段或蓝色线段联结. 证明: 这些线段围成的三角形中, 至少有 2 个单色三角形(即三边同色的三角形).

证明 记 6 个点为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. 点 a_1 与其余 5 点的 5 条联线只能是红、蓝二色, 由抽屉原理, 其中至少有 3

条同色，不妨设 a_1a_2、a_1a_3、a_1a_4 同为红色．如果 a_2a_3、a_2a_4、a_3a_4 中有 1 条是红的(比如 a_3a_4)，则有一红边三角形(即 $\triangle a_1a_3a_4$)；否则，a_2a_3、a_2a_4、a_3a_4 都是蓝的，则有蓝边三角形(即 $\triangle a_2a_3a_4$)．总之，至少有 1 个单色三角形．现设 $\triangle a_1a_2a_3$ 为红边三角形．如果 $\triangle a_4a_5a_6$ 是单色三角形，则无需再证．否则 $\triangle a_4a_5a_6$ 至少有 1 条蓝边，设为 a_4a_5(图 7-4，图中用虚线表示蓝边，实线表示红边，以下同)．如果 a_1a_4、a_2a_4、a_3a_4 中至少有两条红的，则至少又有 1 个红边三角形，因而无需再证．今设 a_1a_4、a_2a_4、a_3a_4 中至少有 2 条蓝边；同理可设 a_1a_5、a_2a_5、a_3a_5 中至少有 2 条蓝边．这 4 条蓝边有一端(甲端)是 a_4 或 a_5，另一端(乙端)是 a_1、a_2 或 a_3．由抽屉原理，这 4 条蓝边中至少有 2 条，其乙端相同，不妨设此乙端是点 a_2，因而这 2 条蓝边必是 a_2a_4 与 a_2a_5，因而又有 1 个蓝边三角形 $\triangle a_2a_4a_5$．□

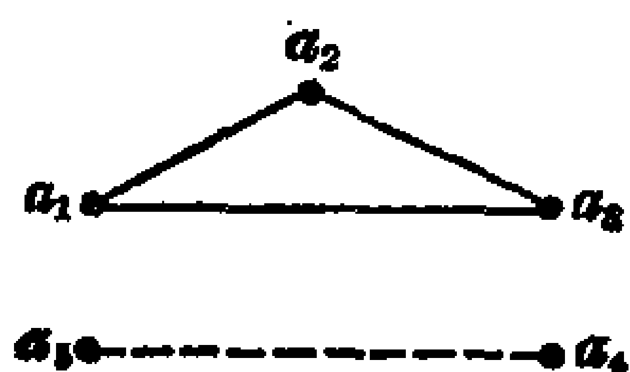
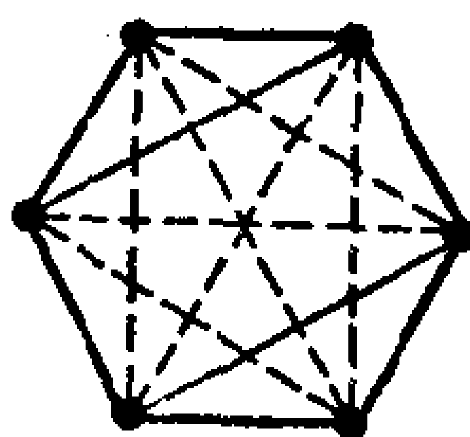


图 7-4



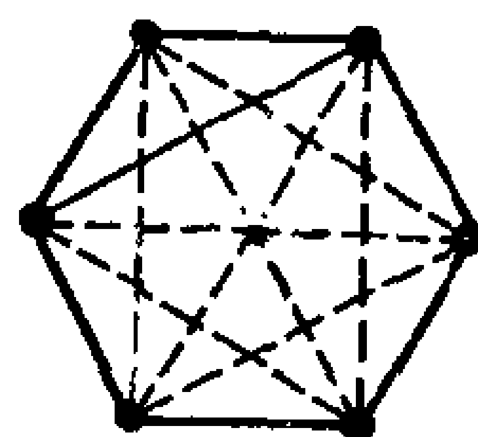


图 7-5

在 6 个点及两种颜色的条件下，例 4 的结论不能改进．图 7-5 给出恰有 2 个单色三角形的例子，这表明例 4 的下界 2 可以达到．另一方面，图 7-6 表明，若把 6 点改为 5 点，则可能连 1 个单色三角形都没有．如果把点数 6 增加为 n，$n \geqslant 7$，而颜色数目仍为 2，单色三角形个数的最佳下界(即可以达到的下界)等于多少呢？显然，当 n 较大时，最佳下界的值可能很大，此时不宜再靠反复应用抽屉原理去求得．1959 年，有人利用

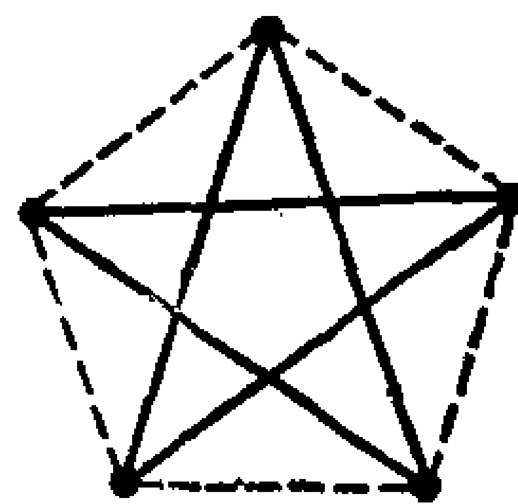


图 7-6

所谓目标函数解决了这个问题.

[例 5] 张三有 n 元和 m 元两种票面的钞票共 100 张，其中 n、m 为整数且 $1\leqslant n<m\leqslant 100$. 证明：张三可以从这些钞票中取出若干张，购买单价为 101 元的物品若干件而无需找补.

证明 设 n、m 元钞票各有 k_0、l_0 张，k_0、$l_0\geqslant 1$，$k_0+l_0=100$. 按题意，即要证明：形如 $kn+lm(0\leqslant k\leqslant k_0,\ 0\leqslant l\leqslant l_0)$ 的正整数中(其全体记为 E)一定有 101 的倍数. 考虑 E 中的 101 个数 $A=\{m,\ 2m,\ \cdots,\ l_0m,\ l_0m+n,\ l_0m+2n,\ \cdots,\ l_0m+k_0n,\ (l_0-1)m+n\}$，如果 A 中有某个数是 101 的倍数，则已得证. 否则，A 中的 101 个数，每个数被 101 除的余数只能取 1, 2, 3, …, 100 这 100 个值. 由抽屉原理，A 中必有两个数 a、b 被 101 除的余数相同，这两个数之差(大减小)是 101 的倍数. 由于 $l_0m-[(l_0-1)m+n]=m-n$，而 $0<m-n<100$，即 l_0m 与 $(l_0-1)m+n$ 被 101 除的余数不同，因此 a、b 这对数不可能取 $(l_0-1)m+n$ 及 l_0m. 除这一对外，不论从 A 中取出哪一对数，它们的差(大减小)必是 $kn+lm$ 形式的正整数，且 $0\leqslant k\leqslant k_0$，$0\leqslant l\leqslant l_0$. 这表明：张三可用 k 张 n 元票及 l 张 m 元票购买单价为 101 元的物品若干件. □

例 5 的技巧在于，从 E 中恰当地挑选 101 个数当作球，并把集 E 按被 101 除的余数分类(剩余类)，每类当作一个抽屉. 在与整除(或倍数)有关的存在性问题的证明中，利用剩余类设计抽屉是常用的一种方法.

[例 6] 某旅馆有 90 个空房间，房间的钥匙互不相同. 来了 100 位旅客，要分发钥匙，使得其中任意 90 人都能住进这 90 个房间，而且每人一间，最少得发多少把钥匙？假定每个房间分出的钥匙数及每个旅客分到的钥匙数都不限.

解 先证明分出的钥匙总数β不得少于990把. 如不然，设$\beta\leqslant 989$. β把钥匙分属90个房间，由抽屉原理，一定有一个房间(不妨设是1号房)至多分出$\left[\frac{\beta}{90}\right]$把钥匙. $\left[\frac{\beta}{90}\right]\leqslant\left[\frac{989}{90}\right]=10$，这表明1号房至多分出10把钥匙，因而至少有90位旅客没有分到1号房的钥匙，他们都无法住进1号房，与题设矛盾.

再证明分出990把钥匙也已足够：每个房间各拿出1把钥匙，这90把分给90位旅客，每人一把；余下的10位旅客，每人分90把钥匙，其中每个房间一把. 这个分发方案符合要求.

因此，最少要分发990把钥匙. □

上面介绍的抽屉原理属于所谓离散形式. 抽屉原理还有所谓连续形式，即下面的

重迭原理 设平面区域$\mathscr{D}$的面积为α，$\mathscr{D}$内含有n个区域$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_n$，它们的面积依次是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 设$l$、$m$是正整数，如果$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n>l\alpha$，则区域$\mathscr{D}$上有一点至少属于这$n$个区域中的某$l+1$个；如果$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<m\alpha$，则区域$\mathscr{D}$上有一点至多属于这$n$个区域中的$m-1$个.

证明 用反证法. 如果$\mathscr{D}$上任一点至多属于n个区域中的l个，即至多被l个区域盖住，则这n个区域的面积和不超过$\mathscr{D}$的面积的l倍，即$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant l\alpha$，这就和题设矛盾. 如果$\mathscr{D}$上任一点至少属于$n$个区域的某$m$个，即至少被$m$个区域盖住，则这$n$个区域的面积和不小于$\mathscr{D}$的面积的$m$倍，即$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\geqslant m\alpha$，这也和题设矛盾. □

若把平面改成空间或曲线，面积改成体积或弧长，则相应地有关于体积或弧长的重叠原理.

［例7］ 半径为16的圆 Γ 内有650个点，证明：存在内半径为2外半径为3的圆环，它至少盖住其中的10个点.

证明 作半径为19且与 Γ 同圆心的圆 L. L 的面积 $\alpha=361\pi$. 以给定点 a_i 为中心作内半径为2外半径为3的圆环 γ_i, $i=1, 2, 3, \cdots, 650$, 其面积为 $\alpha_i=5\pi$. 这650个圆环都落在圆 L 内，而且

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{650}=3250\pi>3249\pi=9\alpha.$$

由重叠原理，在 L 上有一点 O 至少属于这650个圆环中的某10个，设属于 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{10}$. 以 O 为中心作内半径为2外半径为3的圆环 γ. 因点 O 落在 γ_i 内，$i=1, 2, \cdots, 10$, 故点 O 与点 a_i 的距离介于2与3之间，因而点 a_i 也就落在圆环 γ 内(图7-7). 因此，γ 至少盖住10个给定点. □

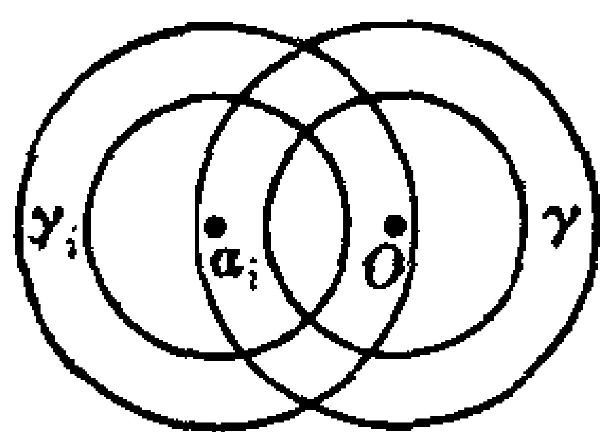


图 7-7

［例8］ 设 n 是整数，$22\leqslant n\leqslant 28$. 在周长 $\alpha=50$ 的圆周上有 n 个点. 证明：在此圆周上存在一段长度为7的半开半闭弧(即只包含一个端点的弧)，恰好盖住3个给定点；也存在一段长度为7的半开半闭弧，恰好盖住4个给定点.

证明 为确定起见，符号 $\widehat{ab}$ 表示这样的半开半闭弧：包括端点 a 及由 a 沿顺时针方向到 b 的一段，但不包含端点 b. 设 n 个给定点按顺时针方向依次排列是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 作 n 个弧长 $\alpha_k=7$ 的弧 $\gamma_k=\widehat{a_kb_k}$, $k=1, 2, \cdots, n$. 因为

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=7n\geqslant 7\times 22>3\times 50=3\alpha,$$

由重叠原理，在圆周上有点 d 至少属于 $\{\gamma_k, k=1, 2, \cdots, n\}$ 中的4个弧，不妨设点 d 属于弧 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. 于是弧 γ_1 至少盖住4个给定点 a_1, a_2, a_3, a_4. 另一方面，因为

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=7n\leqslant 7\times 28<4\times 50=4\alpha,$$

由重叠原理，在圆周上有点 e 至多属于$\{\gamma_k, k=1, 2, \cdots, n\}$中的 3 个弧.从点 e 出发沿顺时针方向寻找$\{a_k, b_k, k=1, 2, \cdots, n\}$中的点，记最先遇到的点为 f. 设弧 $\widehat{ef}$ 的中点为 b. 在圆周上作弧长为 7 的半开半闭弧 $\gamma_0=\widehat{ab}$. 依作法，弧 γ_0 至多盖住 3 个给定点. 因为，如果 a_i 落在 γ_0 上，则点 e 必落在弧 $\gamma_i=\widehat{a_ib_i}$ 上，但点 e 至多属于$\{\gamma_k\}$中的 3 个弧.

让弧长为 7 的半开半闭弧 γ^* 从与 γ_0 叠合的位置出发，沿圆周移动到与弧 γ_1 叠合的位置上. 因为 γ^* 是半开半闭的弧，所以在移动的每个时刻，弧 γ^* 所盖住的给定点的数目，要么增加 1 个，要么减少 1 个，要么不变. 注意到弧 γ_0 至多盖住 3 个给定点，弧 γ_1 至少盖住 4 个给定点，因此，在 γ^* 移动的过程中，必定有一个时刻恰好盖住 3 个给定点，也一定有一个时刻恰好盖住 4 个给定点. □

为了保证例 8 中的结论成立，圆周上给定点的数目 n，其上界不能增至 29，其下界不能降至 21. 为了证实这一点，只要考察周长为 50 的圆周上的 29 等分点及 21 等分点.

练 习 七

1. 任给 52 个整数，从中一定能找到一对数，它们的和或差能被 100 整除.

2. 从自然数 1, 2, 3, …, $2n$ 中任取 $n+1$ 个，这 $n+1$ 个中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数.

3. n 名运动员参加单打循环赛，每人打 $n-1$ 场. 每场比赛胜者得 1 分，没有平局. 证明：如果没有人全胜，则一定有两名运动员，他们的总分相同.

4. 一个国际社团的成员来自 6 个不同的国家，共有 1978 人，编号自 1 至 1978. 证明至少有一个成员，他的编号等于一个与他同国籍的成员的编号的两倍，或者等于两个与他同国籍的成员的编号之和.

5. 在边长为 1 的正三角形内有 5 个点，证明其中有一对点，它们的距离不超过 0.5.

6. 在半径为 1 的圆内有 20 个点，任意 3 点不共线. 证明其中有 3 个点，以

它们为顶点的三角形，其面积不超过 $\frac{\pi}{15}$.

7. 有 100 粒药丸分 60 天服用，每天至少服 1 丸，60 天服完. 设 $m\leqslant 19$. 证明：一定有连续若干天，总共服用 m 粒药丸.

8. 一质点往前跳，每跳一步前进 $\sqrt{2}$ 米. 在这质点的前面，每隔 1 米的点上，都有一个以该点为中心、长为 0.002 米的陷阱. 证明：这质点迟早要掉进某个陷阱里.

9. 有 17 个点，任意 3 点不共线，每两点用一条有色线段联结，但只能是红、蓝、绿三色之一. 证明：这些线段围成的三角形中，至少有 2 个单色三角形.

10. 有 9 个点，任意 3 点不共线，每两点间的联线用红色或蓝色染色，而且使得以这 9 个点中的任意 3 点为顶点的三角形都含有红边. 证明：可以从这 9 个点中找到 4 个点，其中任意两点的联线都是红色(即红棱四面体).

11. 在半径为 5 的球面上有 101 个点. 证明：有一个半径为 5，高为 1 的球冠面，至少盖住其中 11 个点.

12. 有顶点为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的凸五边形 S_1 作 S_1 的平移图形：令 S_1 的顶点 a_1 移到 a_k 上，$k=2, 3, 4, 5$，得 S_1 的平移图形 S_2, S_3, S_4, S_5. 证明：凸五边形 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 中有一对，它们至少有一公共内点.

13. 有顶点为 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 的凸多面体 V_1，作 V_1 的 8 个平移图形，其中 $a_1\to a_i$ 得到的多面体记为 V_i，$i=2, 3, \cdots, 9$. 证明：凸多面体 $V_1, V_2, \cdots, V_9$ 中有一对，它们至少有一公共内点.

14. 考虑一条直线上的有限个点集，每一个点集是两个闭区间的并集，并且任何三个点集都有一个公共点，求证这条直线上存在一个点，它属于这有限个点集中至少半数的点集.

15. 实数轴上任给一个开区间，长度为 $\frac{1}{n}$，其中 n 是正整数. 求证至多有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个形如 $\frac{p}{q}$ $(1\leqslant q\leqslant n)$ 的既约分数属于这个区间.

八、最小数原理

全班同学中一定有一名个子最矮的，全校同学中一定有一名体重最轻的，诸如这种极为简单而又易被人们忽视的事实，可以抽象成下面的命题.

命题 1 有限个实数中，必有一个最小数.

这一命题是如此明显，以致无须证明. 然而正是这个简单的命题，在存在性的证明中发挥极大作用. 1893 年后，曾流传这样一个平面几何难题：平面上有 n 个点，它们不在同一直线上，则必有一条直线恰好通过其中的两点. 这个题目，历经四十多年，一直未能证明. 这确是数学家面临的严峻挑战. 四十多年之后，才有人引用上述命题巧妙地解决了.

[例 1] 平面上有 n 个点，它们不全在一条直线上. 证明：一定有一条恰好通过其中的两个点的直线.

证明 过其中任意两点作直线，设为 L. L 外必有其他给定点. L 外的点 a 到 L 的距离记为 $\rho(L, a)$. 由于过 n 个点中的任意两点所作的直线至多有 C_n^2 条，而每条直线外至多有 $n-2$ 个给定点，因此，所有的正数 $\rho(L, a)$ 组成的集合 S 只有有限个元素. 由命题 1，S 中必有最小数 ρ_0. 设直线 L_0 和点 a_0 适合 $\rho(L_0, a_0)=\rho_0$. 下面来证明 L_0 上恰有两个给定点.

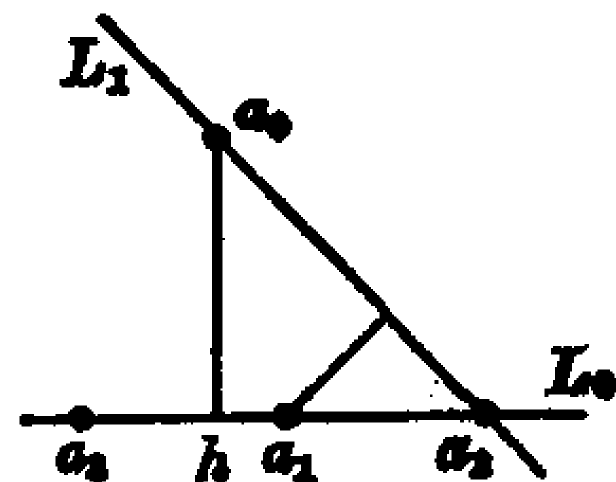


图 8-1

用反证法. 设有 3 个给定点 a_1、a_2、a_3 在 L_0 上. 点 a_0 至直线 L_0 的垂足记为 h. 点 a_1、a_2、a_3 至

少有两点位于 L_0 上点 h 的同侧(包括与点 h 重合). 设 a_1、a_2 位于同侧(图 8-1), 并设点 a_1 离点 h 比点 a_2 离点 h 近. 过点 a_0、a_2 的直线记为 L_1, 则 $\rho(L_1, a_1)<\rho(L_0, a_0)=\rho_0$, 这与 ρ_0 的最小性矛盾. □

例 1 证明的关键在于: 利用 S 中的最小数 ρ_0, 把符合要求的直线 L_0 找出来. 这种为了论证某种对象的存在,用命题 1 中最小数的存在把它找出来的方法,称为最小化选择. 看了上面似乎平凡的证明, 很难相信它曾在近半个世纪的时间里使数学家感到困惑. 这件事表明,寻找一种优美的(可能看起来是简单的)解题技巧, 有时比掌握一种复杂的(甚至还是深奥的)数学工具更为困难.

[例 2] 平面上有 n 条直线 $L_1, L_2, \cdots, L_n$(这里 $n\geqslant 4$), 其中任意两条必相交,任意三条不共点,它们把平面分成不相重叠的区域,其中三角形区域全体记为 B. 证明

$$|B|\geqslant\frac{2}{3}(n-1).$$

证明 n 条直线的交点全体记为 A, 并以 a_{ij} 表示直线 L_i 与 L_j 的交点. 任取 L_k, 因 $n\geqslant 4$, 故 L_k 外有 A 中的点. 如果 L_k 的甲侧有 A 中的点,则由命题 1, 这些点到 L_k 的距离必有最小数 ρ_0, 并设 a_{ij} 适合 $\rho(L_k, a_{ij})=\rho_0$. $\rho(L, a)$ 的意义同例 1. $\triangle a_{ij}a_{ik}a_{jk}$ 称为 L_k 的伴随三角形. 对 L_k 的乙侧也可定义伴随三角形. 下面证明 L_k 的伴随三角形 $\triangle a_{ij}a_{ik}a_{jk}$ 属于 B. 若不然,则必有直线 L_l 把 $\triangle a_{ij}a_{ik}a_{jk}$ 分为两块(图 8-2), 即 L_l 必与 $a_{ij}a_{ik}$ 或 $a_{ij}a_{jk}$ 相交. 不妨设与 $a_{ij}a_{ik}$ 相交, 交点为 a_{il}, 则有 $\rho(L_k, a_{il})<\rho(L_k, a_{ij})=\rho_0$, 与 ρ_0 的最小性矛盾. 故 L_k 的伴随三角形必属于 B.

下面证明,这 n 条直线中,至少有 $n-2$ 条直线,其两侧都

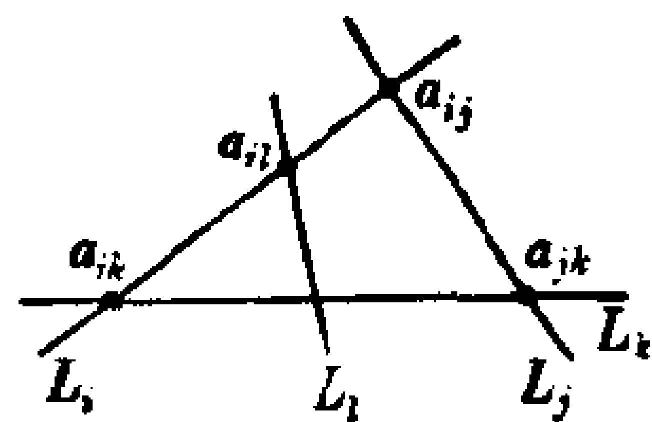


图 8-2

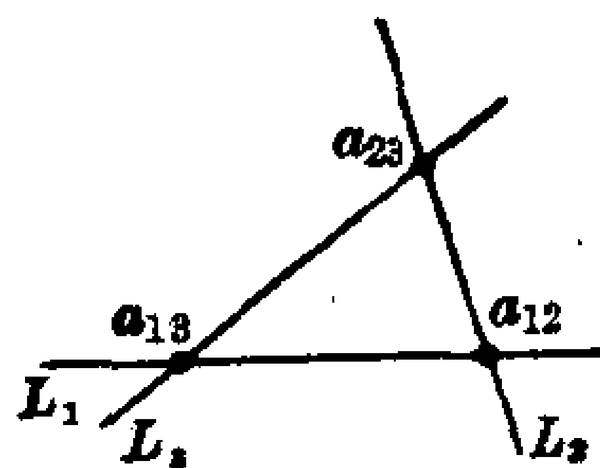


图 8-3

有伴随三角形．否则，设有 3 条直线 L_1、L_2、L_3 各只在一侧有伴随三角形．因 $n\geqslant4$，故另有一直线 L_4．如果 L_4 与 L_3 的交点 a_{34} 在线段 $a_{13}a_{23}$ 之外，则 L_1 或 L_2 的两侧都有 A 中的点，从而 L_1 或 L_2 的两侧都有伴随三角形，矛盾(图 8-3)．因此，L_4 与 L_1、L_2、L_3 的 3 个交点应分别落在 $\triangle a_{12}a_{13}a_{23}$ 的三边上，而这显然也不可能．

按此计算，这 n 条直线至少有 $2(n-2)+2=2(n-1)$ 个伴随三角形，当然，其中有些三角形被重复计算多次．由于每个三角形的三边只能落在 3 条给定的直线上，因此每个伴随三角形至多被计算过 3 次．所以 $|B|\geqslant\frac{2}{3}(n-1)$． □

最小化选择的一种自然的变形是：不直接选用最小的那个数，而是选用次小的、第三小的、…、直至最大的那个数，把要寻找的对象挑出来．

由命题 1 容易推出：

命题 2 任意有限个两两不同的实数可以从小到大排序：$a_1<a_2<\cdots<a_n$．

[例 3] 平面上有 $2n+1$ 个点($n\geqslant1$)，其中任意 3 点不共线．证明：过其中任一点都有一条直线 L，其两侧各有 n 个给定点．

证明 过给定点 p 作直线 Γ，使其余 $2n$ 个点都不在 Γ 上．如果 Γ 的两侧各有 n 个给定点，则无需再证．设 Γ 的

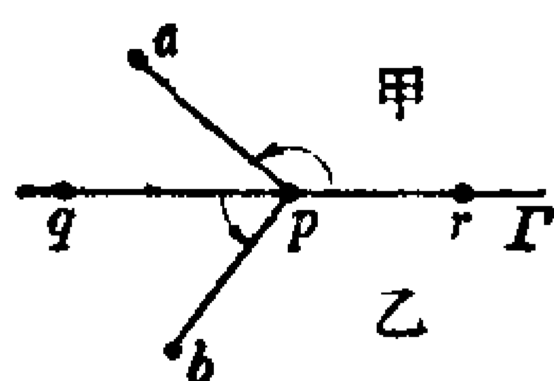


图 8-4

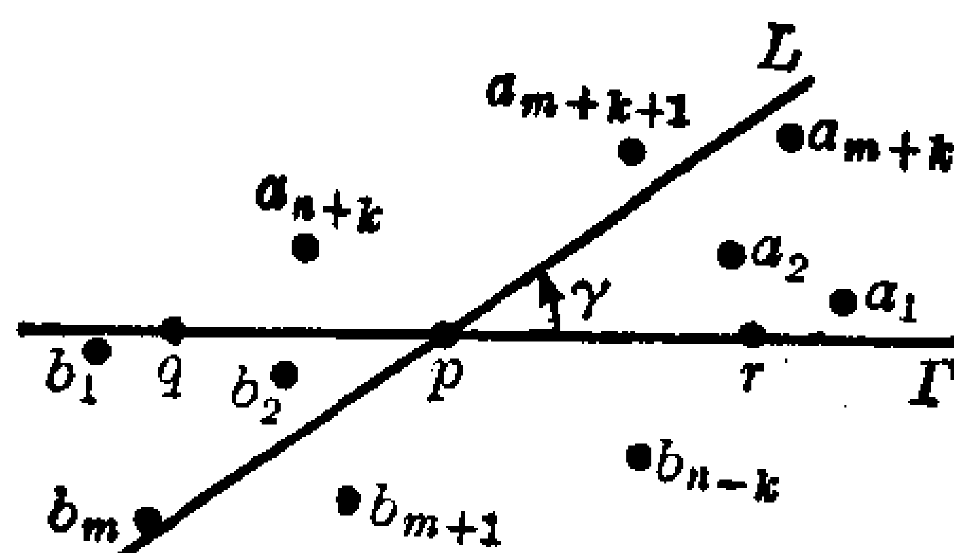


图 8-5

甲、乙侧分别有 $n+k$ 个点、$n-k$ 个点，$1\leqslant k\leqslant n$. 在 Γ 上点 p 的两侧各取一点 q、r(图 8-4). 若给定点 a 在 Γ 的甲侧，则作 $\angle rpa$; 若给定点 b 在 Γ 的乙侧，则作 $\angle qpb$. 因点 a、p、b 不共线，故必有 $\angle rpa\neq\angle qpb$. 按这作法，甲、乙两侧的每一点都对应一个角度，且互不相同. 由命题 2，它们可以从小到大排序，设为

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_{2n}. \tag{1}$$

这 $2n$ 个角，在甲侧的角比在乙侧的角多 $2k$ 个. 因此，当在式(1)中自左至右逐一看过去时，一定可以找到一个自然数 j, $1<j<2n$, 使得 j 个角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 中，落在甲侧的比落在乙侧的恰好多 k 个. 过点 p 作直线 L, 使 L 与 Γ 的夹角 γ 满足 $\alpha_j<\gamma<\alpha_{j+1}$(图 8-5). 直线 L 即合乎要求，即其两侧各有 n 个给定点. □

有限个实数中必有一个最小的数，那么，无穷多个实数中是否一定有最小数呢？一般地说，最小数未必存在. 不过，若把实数改为自然数，结论则是成立的. 即有

最小数原理 设 $\mathbf{N}$ 是自然数全体组成的集合，若 M 是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，则 M 中必有最小数.

最小数原理是关于自然数性质的一条基本原理，许多关于自然数性质的定理可由它推出. 1889 年皮亚诺(G. Peano)曾给出自然数的一个公理体系，其中有条公理是：

归纳公理 设 M 是自然数全体 $\mathbf{N}$ 的子集. 如果 M 满足

1. 自然数 1 属于 M;

2. 若自然数 n 属于 M, 则 n 的后继元 $n+1$ 也属于 M,

则 M 包含所有的自然数, 即 $M=\mathbf{N}$.

从自然数系的公理体系出发, 由归纳公理可以推出最小数原理. 归纳公理作为自然数系的公理体系中的一条公理是无须证明的. 但应当指出, 由最小数原理及皮亚诺公理体系中除归纳公理外的其余几条公理, 也可推出归纳公理. 这即是说, 在皮亚诺公理体系中, 可以用最小数原理替代归纳公理. 这一事实证明如下.

由归纳公理推出最小数原理: 假设最小数原理不成立, 则有 $\mathbf{N}$ 的非空子集 M, M 中没有最小数. 作集合 A: 自然数 n 属于 A, 当且仅当所有不超过 n 的自然数 m 都不属于 M. 于是集合 A 适合

1. 自然数 1 属于 A. 否则, 若 1 不属于 A, 则因不超过 1 的自然数只有 1 本身, 故 1 属于 M. 1 是 M 的最小数, 矛盾.

2. 如果自然数 n 属于 A, 则 $n+1$ 也属于 A. 事实上, 因 n 属于 A, 故所有不超过 n 的自然数 m 都不属于 M. 因此, 若 $n+1$ 属于 M, 则 $n+1$ 是 M 的最小数, 不可能. 于是 $n+1$ 不属于 M, 所以 $n+1$ 属于 A.

集合 A 适合归纳公理的条件 1 与 2, 故 $A=\mathbf{N}$. 另一方面, 因 M 非空, 故必有自然数 m 属[redacted]从而 m 不属于 A, $A\neq\mathbf{N}$. 矛盾.

由最小数原理推出归纳公理: 设 M 是 $\mathbf{N}$ [redacted]满足归纳公理中的条件 1 及 2. 记 $B=\mathbf{N}-M$. 由条件 1, $1\notin B$. 假设 $B\neq\varnothing$, 则由最小数原理, B 中有最小数 b_0. 但 $1\notin B$, 故

$b_0 \neq 1$, 因此 b_0-1 是自然数, 且 $b_0-1 \notin B$, 因而 $b_0-1 \in M$. 由条件 2, b_0-1 的后继元 $b_0 \in M$, 从而 $b_0 \notin \mathbf{N}-M$, 即 $b_0 \notin B$, 矛盾. 因此 $B=\varnothing$, 从而 $M=\mathbf{N}$. □

在证明与自然数 n 有关的命题 $P(n)$ 时, 常用数学归纳法. 数学归纳法的正确性也可用最小数原理证明.

数学归纳法原理 设 $P(n)$ 是与自然数 n 有关的命题, 若

1. 命题 $P(1)$ 成立;

2. 对所有自然数 m, 若 $P(m)$ 成立则 $P(m+1)$ 成立,

则命题 $P(n)$ 对一切自然数 n 成立.

证明 使得命题 $P(m)$ 不成立的自然数 m 构成的集合记为 M. 若 M 非空, 则由最小数原理, M 中有最小数 m_0. 因命题 $P(1)$ 成立, 故 $m_0 \neq 1$, 从而 m_0-1 是自然数, 而且 $m_0-1 \notin M$, 即命题 $P(m_0-1)$ 成立. 但由条件 2, 命题 $P(m_0)$ 成立, 即 $m_0 \notin M$, 矛盾. 于是 $M=\varnothing$, 即命题 $P(n)$ 对一切 n 都成立. □

最小数原理是论证存在性的一条基本原理, 它在数学的各分支有着广泛的应用.

[例 4] 平面上有一串长与宽都是整数的长方形

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots. \tag{1}$$

证明: 可以从长方形序列(1)中挑出一个无穷子序列, 使得前面一个长方形可以套进后面一个长方形, 一个套进另一个.

证明 设 S_n 的长为 a_n, 宽为 b_n. 长方形序列(1)的长与宽各组成一个自然数的无穷序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots, \tag{2}$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots. \tag{3}$$

由最小数原理, 自然数序列(2)中有最小数 a_{k_1}. 考虑无穷序列 a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, $\cdots$, 由最小数原理, 其中有最小数 a_{k_2}, $k_2>k_1$.

再考虑无穷序列 a_{k_2+1}, a_{k_2+2}, $\cdots$, 由最小数原理, 其中有最小数 a_{k_3}, $k_3>k_2$. 如此继续,便得到数列(2)的一个子序列

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ \cdots,\ a_{k_i},\ \cdots, \tag{4}$$

适合 $a_{k_1}\leqslant a_{k_2}\leqslant a_{k_3}\leqslant\cdots\leqslant a_{k_i}\leqslant\cdots$. 考虑与子序列(4)相应的序列(3)的子序列

$$b_{k_1},\ b_{k_2},\ b_{k_3},\ \cdots,\ b_{k_i},\ \cdots, \tag{5}$$

仿前面, 反复应用最小数原理,从子序列(5)中可以选出子序列

$$b_{k_{i_1}},\ b_{k_{i_2}},\ \cdots,\ b_{k_{i_j}},\ \cdots, \tag{6}$$

适合 $b_{k_{i_1}}\leqslant b_{k_{i_2}}\leqslant\cdots\leqslant b_{k_{i_j}}\leqslant\cdots$. 回到长方形序列(1),其子序列

$$S_{k_{i_1}},\ S_{k_{i_2}},\ \cdots,\ S_{k_{i_j}},\ \cdots$$

的前一个长方形套进后一个长方形,一个套进一个. □

最小数原理不但可以用来证明某种对象的存在, 还可以结合反证法,用来证明某种对象不存在.

[例 5] 有两块 $m\times m\times m$ 的立方体和四块 $n\times n\times n$ 的立方体,都是用单位立方砖堆成的. 用完这些立方砖,并且不能打碎,能否堆成一个大立方体?

解 假设可以堆成一个大立方体, 它是 $l\times l\times l$ 的. 则应当有 $2m^3+4n^3=l^3$. 这表明,(l, m, n)是方程

$$x^3-2y^3-4z^3=0 \quad (\text{其中 } x、y、z>0) \tag{7}$$

的一组整数解. 设 S 是方程(7)所有整数解构成的集合. 因 (l, m, n)属于 S,故 S 非空. 从 S 的所有元素(x, y, z)中取自然数 x 构成的集合记为 L. 因 $l\in L$, 故 L 非空. 由最小数原理, L 中有最小数 l_0, 且有自然数 m_0、n_0, 使(l_0, m_0, n_0)属于 S, 即(l_0, m_0, n_0)是方程(7)的一组整数解. 从而

$$l_0^3=2m_0^3+4n_0^3, \tag{8}$$

表明 l_0 是偶数. 设 $l_0=2l_1$, l_1 是自数数且 $l_1<l_0$. 由(8)式.

有

$$4l_1^3=m_0^3+2n_0^3, \tag{9}$$

表明 m_0 也是偶数. 设 $m_0=2m_1$, m_1 是自然数,代入(9)式,有

$$2l_1^3=4m_1^3+n_0^3, \tag{10}$$

上式表明 n_0 又是偶数. 设 $n_0=2n_1$, n_1 是自然数,代入(10)式,可得

$$l_1^3-2m_1^3-4n_1^3=0.$$

这表明 (l_1, m_1, n_1) 是方程(7)的一组整数解, 即 (l_1, m_1, n_1) 属于 S, 从而 $l_1\in L$. 但 $l_1<l_0$, 这与 l_0 的最小性矛盾.

因此, 不可能不打碎方砖而把两块 $m\times m\times m$ 与四块 $n\times n\times n$ 的立方体中的全部方砖重新堆成一个大立方体. □

例 5 中, 为了证明某种对象不存在, 用反证法, 假设它存在, 从而存在自然数集 **N** 的某个非空子集 L. 由最小数原理, L 中有最小数 l_0. 但由 l_0 的存在, 又可以找出比 l_0 小的自然数 l_1, l_1 也属于 L, 从而导致矛盾. 这种证明技巧称为无限下推法, 它是费尔马(P. S. de Fermat)首创的. 在论证某种对象不存在时, 无限下推法是一种有效的方法. 下面仅举两件事. 众所周知, 费尔马大定理和四色问题是数学中两个非常有名的难题. 十七世纪, 费尔马曾在一本书的空白处写到, 他已经证明了, 对任意自然数 $n>2$, $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. 这就是费尔马大定理. 但他的证明从未有人找到过. 费尔马在给他的朋友的信中用无限下推法证明 $n=4$ 的情形, 但也没有详细论证. 1676 年, 弗列尼克尔(B. Frénicle de Bessy)应用无限下推法给出 $n=4$ 的一个完整的证明. 但费尔马大定理至今仍未获证. 四色问题据说是1840年墨比乌斯(A. F. Möbius)最先提出来的. 有据可查的是, 1852 年一位攻读数学的大学

生喀斯里(F. Guthrie)对德·摩根(A. De. Morgan)提到这个问题：任何一张平面地图，用四种颜色填色是否已经足够？1879年肯普(S. A. B. Kempe)发表了一个证明，这个证明应用了无限下推法：如果有需要五种颜色的地图(称为五色地图)，那么，这种地图的区域个数组成一个非空的自然数集合 M. 由最小数原理，M 中有最小数 m_0. 但由具有 m_0 个区域的五色地图的存在，可以找到另一个区域个数少于 m_0 的五色地图，于是导致矛盾. 经过11年，1890年海胡特(P. J. Heawood)指出肯普"证明"中在一个地方出了差错. 自那时起，许许多多数学家为给出一个正确的证明绞尽脑汁，提出种种方法，但都没有成功. 直到1976年阿普尔(Appel)、黑肯(Hakan)和考齐(Koch)才解决了四色问题，但却是利用了电子计算机，并且在电子计算机上计算了1200个小时. 非常有趣的是，经过一百年时间的折腾，他们的证明还是回到当年肯普所用的方法，即无限下推法. 不过，他们对肯普证明中的错误做了大量艰巨而又精致的修补工作.

练 习 八

1. 设 n 为自然数，证明存在以点 $(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$ 为中心的圆，其圆内部分恰含 n 个格点.

2. 空间有 n 个平面 $(n\geqslant 5)$，任意3个交于一点，任意4个不共点. 它们把空间分成不相重叠的几何体，其中的四面体全体记以 E. 证明 $|E|\geqslant\frac{1}{4}(2n-3)$.

3. 平面上有 $2n+3$ 个点 $(n\geqslant 1)$，任意3点不共线，任意4点不共圆. 证明：存在过其中3个给定点的圆，使圆内部分与圆外部分各有 n 个给定点.

4. 有 n 个男生 m 个女生 $(n、m\geqslant 2)$，每个男生至少认识(彼此认识)一女生，每个女生不全认识 n 个男生. 证明：他们当中有两个男生与两个女生，其中每个男生恰好认识其中一女生，其中每个女生恰好认识其中一男生.

5. 平面上有22点，任意3点不共线. 证明存在一种结对法，22个点结成

11 个点对，使得联结同一点对中的两点所得的 11 条线段至少有 5 个交点.

6. 班上有 10 人，编成各种小组，每人参加的组数不限，但任两组间，至少各有一个成员不是另一组的成员. 证明：存在唯一的编组方法，使得到的组数最多.

7. 平面上有有限个圆，它们盖住的面积等于 9. 证明从中可挑出若干个，它们两两不相交，而且盖住的面积不小于 1.

8. 设 $\frac{m}{n}$ 是真分数($n>m>0$, n、m 为整数). 证明存在 $\frac{m}{n}$ 的一种不等的倒数分拆，即存在自然数 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，使得 $\frac{m}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$.

9. 有一个长、宽、高都取整数值的长方体无穷序列 V_1, V_2, $\cdots$, V_n, $\cdots$，证明从中可以挑出一个无穷子序列，使得前面的长方体可以套进后面的长方体.

10. 证明方程 $x^4+y^4+z^4=8x^2y^2$ (x, $y>0$, $z\geqslant 0$) 没有整数解.

九、递推、迭代、归纳

一张圆薄饼，切一百刀，最多能切成多少块？为了得到最多块数，任意两刀都要在饼上有交点，而任意三刀都不能切在同一点上．当然，可以按这个要求去切一百刀，然后数数看．但这是笨办法．要是切一千刀，一万刀，能切完再点数？当然不能这样去做，应想个好办法．

怎样计算？切一百刀，太多了．先把复杂问题简单化，从切一刀开始．切一刀，得 2 块；切两刀，得 4 块；切三刀，得 7 块；切四刀，得 11 块．好啦，先别切，看一看这中间有什么规律？一张饼，切第一刀，增加了 1 块；切第二刀，又增加了 2 块；切第三刀，又增加了 3 块；切第四刀，又增加了 4 块．这时候，规律性的东西显现出来了：切第 n 刀，增加了 n 块！是不是这样呢？如果是，那末，如何应用这个规律求出切一百刀最多能切成的块数呢？

用 a_n 记切 n 刀最多能切成的块数．上面的解题思路是：

第一步，把复杂问题简单化．切一刀，两刀，看看能切成多少块．显然有 $a_1=2$, $a_2=4$.

第二步，把具体问题一般化．切第 n 刀，看看又增加了多少块．可以证明又增加了 n 块，即有关系式

$$a_n=a_{n-1}+n. \quad (\text{这里 } n\geqslant 2) \tag{1}$$

第三步，根据前两步的结果，计算切一百刀最多能切成的块数，即求出 a_{100}.

(1)式叫做数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的递推关系式或递推公

式. 一般地说,给定数列$\{a_n\}$,如果存在一个把a_n与前面若干项$a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_{n-1}$联系起来的方程$\Phi(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_{n-1}, a_n)=0$,且当$n\geqslant n_0$都成立,则称它为数列$\{a_n\}$的递推方程(或递归方程). 从递推方程解出通项$a_n$的明显表达式

$$a_n=\varphi(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_{n-1}), \qquad (2)$$

称为数列$\{a_n\}$的递推关系式或递推公式. 数列$\{a_n\}$开头k项$a_1, a_2, \cdots, a_k$的值,称为递推方程的初始条件.

上面所说的解题步骤即是: 给出初始条件, 建立递推公式, 求通项(或某项)的值. 递推关系几乎对所有的数学分支都有重要应用. 利用递推关系求出计数公式, 是计数方法中一种极其重要的方法. 本节着重于: 如何建立递推公式? 如何由递推公式及初始条件求出通项的值?

[例 1] 平面上有100个圆,任意两圆交于两点, 任意三圆不共点. 这100个圆把平面分成多少块不相重叠的区域?

解 用a_n表示n个圆把平面分成的区域数. 显然$a_1=2$. $n-1$个圆把平面分成a_{n-1}块区域. 现添加一个圆, 使这n个圆仍符合题设. 这个新添的圆与原先$n-1$个圆共有$2(n-1)$个交点, 它们把新添的圆分成$2(n-1)$段弧, 而每段弧把原先的某块区域一分为二,所以增加$2(n-1)$块区域. 即有递推公式

$$a_n=a_{n-1}+2(n-1). \quad (其中\ n\geqslant 2) \qquad (3)$$

为了求a_{100},依次把$n=100, 99, \cdots, 3, 2$代入(3)式:

$$\begin{aligned} a_{100}&=a_{99}+2\cdot 99,\\ a_{99}&=a_{98}+2\cdot 98,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_3&=a_2+2\cdot 2,\\ a_2&=a_1+2\cdot 1. \end{aligned} \qquad (4)$$

然后，自上而下，一行一行往下推进，并注意 $a_1=2$：

$$a_{100}=a_{99}+2\cdot99=a_{98}+2\cdot98+2\cdot99=\cdots$$
$$=a_1+2\cdot1+2\cdot2+\cdots+2\cdot98+2\cdot99=9902.$$

或者是，在(4)式中，等式两边分别相加，即对递推公式(3)的两边分别取和：

$$\sum_{n=2}^{100}a_n=\sum_{n=2}^{100}a_{n-1}+2\sum_{n=2}^{100}(n-1),$$

同样得到 $a_{100}=2+2\sum\limits_{n=2}^{100}(n-1)=9902$. 一般地，有

$$a_n=n(n-1)+2. \qquad \square$$

例1中，建立递推公式的方法是：在原先的 $n-1$ 个圆中，添加一个圆，看看区域的个数如何变化. 由递推公式求 a_{100} 的方法是：前一种用的是所谓迭代法，步步代入，步步推进；后一种用的是取和法，对递推公式两边分别取和. 一般说来，形如 $a_n=a_{n-1}+f(n)$ 的递推公式都可采用两边取和的方法求通项的值.

上面说的迭代法可概述如下：设数列 $\{a_n\}$ 有递推公式

$$a_n=\varphi(a_{n-k},\ \cdots,\ a_{n-1}), \tag{5}$$

在(5)式中取 $n=m$，得

$$a_m=\varphi(a_{m-k},\ \cdots,\ a_{m-1}). \tag{6}$$

再在(5)式中取 $n=m-1$，得 $a_{m-1}=\varphi(a_{m-k-1},\ \cdots,\ a_{m-2})$，代入(6)式，得 $a_m=\varphi(a_{m-k},\ \cdots,\ a_{m-2},\ \varphi(a_{m-k-1},\ \cdots,\ a_{m-2}))$，其左端只与 $a_{m-k-1},\ \cdots,\ a_{m-2}$ 有关，故可记为

$$a_m=\varphi_1(a_{m-k-1},\ \cdots,\ a_{m-2}). \tag{7}$$

又在(5)式中取 $n=m-2$，得 $a_{m-2}=\varphi(a_{m-k-2},\ \cdots,\ a_{m-3})$，代入(7)式，得 $a_m=\varphi_1(a_{m-k-1},\ \cdots,\ a_{m-3},\ \varphi(a_{m-k-2},\ \cdots,\ a_{m-3}))$，其左端只与 $a_{m-k-2},\ \cdots,\ a_{m-3}$ 有关，故可记为

$$a_m=\varphi_2(a_{m-k-2}, \cdots, a_{m-3}).$$

如此反复代入,最后便可把 a_m 用 $a_1, \cdots, a_k$ 表示,即

$$a_m=\varphi^*(a_1, \cdots, a_k).$$

再把初始条件中 $a_1, \cdots, a_k$ 的值代入上式,即得通项 a_m 的值.从递推公式到通项公式这一推导过程,是逐步代入的过程,每代入一步,下标就往下降,直到最后能用开头的 k 个项 $a_1, \cdots, a_k$ 表示为止. 这就是把(5)式称为推递公式的原因. 由于这一过程是通过逐步代入来实现的,所以称为迭代.

就我们的目的而言,我们关心的是:给出与自然数 n 有关的集合 A_n, 求它的元素个数 $|A_n|=a_n$. $\{a_n\}$为数列, 于是求 $|A_n|$ 的计数问题便转化为求数列$\{a_n\}$的通项问题, 从而可通过求$\{a_n\}$的递推公式和初始条件, 再经迭代来进行了.

[例 2] 有 30 个箱子,编号为 1, 2, ⋯, 30, 各配一把钥匙,30 把互不相同. 每个箱放进一把钥匙, 锁好. 现撬开 1、2 号箱, 取出钥匙去开别的箱, 再取出钥匙又去开别的箱, 如最终能把箱子全打开, 则说是一种好的放钥匙的方法. 求好的放法种数.

解 记 n 箱 n 把钥匙好的放法种数为 a_n. 显然 $a_2=2$.

考虑 $n\geqslant 2$. i 号箱的钥匙称为 i 号钥匙. 于是 n 箱 n 把钥匙的放法可用 n 元有序数组 $\alpha=(k_1, k_2, \cdots, k_n)$表示: i 号箱放进 k_i 号钥匙, $i=1, 2, \cdots, n$. 现再添加 $n+1$ 号箱 $n+1$ 号钥匙. 考虑 $n+1$ 箱 $n+1$ 把钥匙的下述 $n+1$ 种放法

$$\alpha_i=(k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, n+1, k_{i+1}, \cdots, k_n, k_i), \quad 1\leqslant i\leqslant n+1$$

与 n 箱 n 把钥匙的 1 种放法

$$\alpha=(k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \cdots, k_n)$$

的关系. 很明显, α_{n+1} 不是好放法. 可以证明: α_i(这里 $1\leqslant i\leqslant n$)是 $n+1$ 箱 $n+1$ 把钥匙的好放法当且仅当 α 是 n 箱 n 把钥

匙的好放法. 当 $i=1, 2$ 时, 这是显然的. 当 $i\geqslant 3$ 时, 在放法 α_i 中能打开 i 号箱当且仅当在放法 α 中能打开 i 号箱. 因此, 如果在放法 α 中不能打开 i 号箱, 则 α_i 与 α 都是不好的放法. 如果在放法 α 中能打开 i 号箱, 则不难知道, α_i 与 α 要么都是好放法要么都是不好的放法. 因此, 按上面的方法, n 箱 n 把钥匙的一种好放法与 $n+1$ 箱 $n+1$ 把钥匙的一组(n 种)好放法一一对应. 于是有递推公式

$$a_{n+1}=na_n. \tag{9}$$

最后利用递推公式(9)进行迭代, 并代入 $a_2=2$, 得

$$a_{30}=29a_{29}=29\cdot 28a_{28}=\cdots=(29!)a_2=(29!)2.$$

或者是, 在递推公式(9)的两边分别取乘积

$$a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdots a_{29}\cdot a_{30}=(2a_2)(3a_3)(4a_4)\cdots(28a_{28})(29a_{29}),$$

从而得到 $a_{30}=(29!)a_2=(29!)2.$ □

一般说来, 对形如 $a_n=f(n)a_{n-1}$ 的递推公式, 都可以采用等式两边分别取乘积的方法来求出通项 a_n 的值.

[例 3] m 个人($m\geqslant 2$)互相传球, 接球后即传给别人. 由甲发球, 并把它当作第 1 次传球. 求经过 n 次传球后, 球仍回到发球人甲手中的传球方式种数 a_n.

解 显然 $a_1=0, a_2=m-1$. 把 n 次传球后, 球仍回到甲手中的传球方式分成两个阶段: 前 $n-1$ 次传球与第 n 次传球. $n-1$ 次传球, 每次有 $m-1$ 人可选择, 故共有 $(m-1)^{n-1}$ 种传球方式. 经 n 次传球后球回到甲手中, 则前 $n-1$ 次传球后球不在甲手中. 因此, 前 $n-1$ 次的传球方式有 $(m-1)^{n-1}-a_{n-1}$ 种. 第 n 次传球只能传给甲, 只有 1 种方式. 故有递推公式

$$a_n=(m-1)^{n-1}-a_{n-1}. \tag{10}$$

下面用三种方法由(10)式求通项 a_n 的值. 先用迭代法:

$$
\begin{aligned}
a_n &= (m-1)^{n-1} - a_{n-1} \\
&= (m-1)^{n-1} - (m-1)^{n-2} + a_{n-2} = \cdots \\
&= (m-1)^{n-1} - (m-1)^{n-2} + (m-1)^{n-3} + \cdots \\
&\quad + (-1)^n (m-1).
\end{aligned}
$$

再用取乘积法：作变换 $b_k = (m-1)^{-k} a_k - m^{-1}$，则可把(10)式改写成 $b_k = -(m-1)^{-1} b_{k-1}$. 两边取乘积

$$
\begin{aligned}
b_2 \cdot b_3 \cdots b_n = & [-(m-1)^{-1} b_1][-(m-1)^{-1} b_2] \\
& \cdots [-(m-1)^{-1} b_{n-1}],
\end{aligned}
$$

化简，并代入 $b_1 = -m^{-1}$，得 $b_n = (-1)^n (m-1)^{-(n-1)} m^{-1}$. 代入 $b_n = (m-1)^{-k} a_k - m^{-1}$，整理后，可得

$$
a_n = (-1)^n \frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)^n}{m}. \tag{11}
$$

最后一种方法，用数学归纳法证(11)式：因 $a_2 = m-1$，故(11)式对 $n=2$ 成立. 归纳假设 $n=k$ 时(11)式成立，则由递推公式(10)，有

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (m-1)^k - a_k = (m-1)^k - (-1)^k \frac{m-1}{m} - \frac{(m-1)^k}{m} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)^{k+1}}{m}.
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时，(11)式成立. 在这里，我们顺便得到恒等式

$$
\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (m-1)^{n-k} = (-1)^n \frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)^n}{m}. \quad \square
$$

由递推公式求通项公式叫解递推关系. 数学归纳法也是解递推关系的一种常用方法. 另外，还有另一种归纳方法——倒推归纳法，在解递推关系时也很有用.

倒推归纳法原理 设 $P(n)$ 是一个与自然数 n 有关的命题. 如果

1．对某一自然数 m，命题 $P(m)$ 成立;

2．对任一自然数 $k<m$，若 $P(k+1)$ 成立则 $P(k)$ 成立，那末，对所有自然数 $n\leqslant m$，命题 $P(n)$ 成立.

证明 用反证法．假设存在自然数 $n<m$，$P(n)$ 不成立．因使 $P(n)$ 不成立的 n 只有有限个，其中必有最大的，记为 n_0．这里 $n_0<m$ 且有 $P(n_0+1)$ 成立，因此，由条件 2，应有 $P(n_0)$ 成立，这就得到矛盾. □

[例 4] 用黑、白球共 m 个排成一列，同色球不加区别，以 a_r 表示至少有连续 r 个黑球排在一起的排列方法个数，$r\leqslant m\leqslant 2r$．证明:

$$a_r=(m-r+2)2^{m-r-1}. \tag{12}$$

证明 以 b_r 记恰好有连续 r 个黑球排在一起的排列方法个数．因 $r\leqslant m\leqslant 2r$，故按本书第 25 页例 3 的方法，易证 r 黑连贯的个数

$$b_r=2\cdot 2^{m-r-1}+(m-r-1)2^{m-r-2}=(m-r+3)2^{m-r-2}.$$

因为，连贯 $1\to r$ 与 $m-r+1\to m$ 各有 2^{m-r-1} 个，连贯 $2\to r+1$，$3\to r+2$，$\cdots$，$m-r\to m-1$ 各有 2^{m-r-2} 个．因 $a_r=a_{r+1}+b_r$，所以

$$a_r=(m-r+3)2^{m-r-2}+a_{r+1}. \tag{13}$$

用倒推法由递推公式(13)推出(12)式：显然 $a_m=1$，这时(12)式成立．归纳假设 $a_{r+1}=(m-r+1)2^{m-r-2}$，于是由递推公式(13)，有

$$\begin{aligned}a_r&=(m-r+3)2^{m-r-2}+(m-r+1)2^{m-r-2}\\&=(m-r+2)2^{m-r-1}.\end{aligned}$$

故证得(12)式对 $r\leqslant m$ 都成立.

也可用取和法：对递推公式 $a_k=(m-k+3)2^{m-k-2}+a_{k+1}$ 的两边自 r 至 $m-1$ 取和，并代入 $a_m=1$，可得

$$a_r=1+\sum_{k=r}^{m-1}(m-k+3)2^{m-k-2}.$$

这里顺便得到：当 $r\leqslant m\leqslant 2r$ 时，有恒等式

$$1+\sum_{k=r}^{m-1}(m-k+3)2^{m-k-2}=(m-r+2)2^{m-r-1}. \qquad \square$$

上面讨论的是依赖于一个下标 n 的数列 $\{a_n\}$ 的递推方程，当然可以推广到依赖于多个下标的情形。我们只考虑二重数列 $\{a_{n,m}\}$，其中 $n=1, 2, 3, \cdots$, $m=1, 2, 3, \cdots$. 如果存在一个联系 $a_{n,m}$ 与 $a_{i,j}(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ (i, j)\neq(n, m))$ 的方程 Φ，且对一切 $n\geqslant n_0$, $m\geqslant m_0$ 都成立，则 Φ 称为数列 $\{a_{n,m}\}$ 的递推方程。从递推方程解出 $a_{n,m}$ 的明显表达式，则称为数列 $\{a_{n,m}\}$ 的递推公式。

[例 5] r 个编号自 1 至 r 的球分放进 n 个相同的盒里，每盒球数不限。没有空盒的放法种数记为 $S(r, n)$. 求 $S(6, 4)$.

解 把 r 球 n 盒无一空盒的放法分为两类. A_1: r 号球独占一盒，此时其余 $r-1$ 球分放其余 $n-1$ 盒且每盒不空，故 $|A_1|=S(r-1, n-1)$; A_2: 放 r 号球的盒里至少有 2 球，此时除 r 号球外的 $r-1$ 球先分放 n 盒且每盒不空，再把 r 号球放进 n 盒中的任一盒，故 $|A_2|=nS(r-1, n)$. 由加法公式，得

$$S(r, n)=S(r-1, n-1)+nS(r-1, n). \qquad (14)$$

递推公式(14)对 $2\leqslant n\leqslant r-1$ 成立. 容易知道

$$S(r, 1)=1,\quad S(r, r)=1. \qquad (15)$$

```
          1
        1   1
      1   3   1
    1   7   6   1
  1  15  25  10   1
1  31  90  65  15   1
........ ....................
```

最后进行迭代：把 $S(r, n)$ 的值 $(r=1, 2, 3, \cdots;\ 1\leqslant n\leqslant r)$ 排成三角形阵如左，其中 $S(r, n)$ 由

第 r 行左起第 n 个数给出．由(15)式可以看出，此三角阵的两边都是 1．由(14)式可以看出，此三角阵内部某一行的第 n 个值等于它的左肩上的值与右肩上的值的 n 倍之和．由三角阵可以知道，$S(6,\ 4)=65$. □

在本书第 36 页例 5 中曾用容斥原理给出 $S(r,n)$ 的表达式．应用数学归纳法，也不难由递推公式(14)以及(15)式证明该公式．

适合递推公式(14)及条件(15)的数列 $\{S(r,\ n)\}$，通称为第二类斯特林(J.Stirling)数，它是组合论里一类重要的数．$\{S(r,\ n)\}$ 有下面的组合解释：设 A 是一个 r 元集合，把它分划成 n 个非空无序子集，这种分划的总数即为 $S(r,\ n)$．因此，$S(r,\ n)$ 也称为 r 元集合分为 n 个非空无序子集的分划数．

［例 6］ r 个人围坐在 n 张相同的圆桌旁，每桌少则 1 人，多则不限．在两种坐法中，只要有某人，他的右邻不是同一人，则认为坐法不同；否则不加区别．不同的坐法的数目记为 $S^*(r,\ n)$．求 $S^*(6,\ 4)$．

解 设 r 人中有位张三．张三的坐法无非是：1．独占一桌，而其余 $r-1$ 人围坐在另 $n-1$ 张桌旁，有 $S^*(r-1,\ n-1)$ 种坐法；2．张三那张桌有 2 人以上，这时可让其他 $r-1$ 人先入座，每桌至少 1 人，有 $S^*(r-1,\ n)$ 种坐法，坐定后张三再入座，张三的右邻不同坐法就不同，故有 $r-1$ 种坐法，因此这类坐法共有 $(r-1)S^*(r-1,\ n)$ 种．由加法公式，得递推公式

$$S^*(r,\ n)=S^*(r-1,\ n-1)+(r-1)S^*(r-1,\ n). \tag{16}$$

上式对 $2\leqslant n\leqslant r-1$ 都成立．容易知道

$$S^*(r,\ 1)=(r-1)!,\quad S^*(r,\ r)=1. \tag{17}$$

最后进行迭代：仿例 5，把 $S^*(r,\ n)$ 的值排成三角形阵如

下，$S^*(r,n)$由第 r 行左起第 n 个数给出．三角阵的两边由(17)式得到，内部则由递推公式(16)和两边的值算出．由三角阵知 $S^*(6,\ 4)=85$．□

1					
1	1				
2	3	1			
6	11	6	1		
24	50	35	10	1	
120	274	225	85	15	1
……					

适合例6的递推公式(16)与条件(17)的数列$\{S^*(r,\ n)\}$通称为第一类斯特林数．有的采用另一种定义．设 $S'(r,\ n)$(这里 $r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ 1\leqslant n\leqslant r$)适合递推公式

$$S'(r,\ n)=S'(r-1,\ n-1)-(r-1)S'(r-1,\ n),$$

及条件 $S'(r,\ 1)=(-1)^{r-1}(r-1)!$，$S'(r,\ r)=1$，则数列$\{S'(r,\ n)\}$通称为第一类斯特林数．它是 x 的 r 次多项式 $(x)_r=x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)$展开式中 x^n 的系数．

［例 7］　有 n 个分别为1岁，2岁，…，n 岁的小孩排成一列．规定移位方法 P：每次移位由某一人走出原位，并插进后面某两个小孩中间或排在最后．以 $\bar{S}(n,\ k)$记按方法 P 要且仅要移位 k 次即可使 n 个小孩由小到大排队(称为正规队形)的站队方法的种数．求 $\bar{S}(6,\ 4)$．

解　i 岁小孩用 i 表示，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$．站队方法可用 n 元有序数组 $\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$表示：$a_i$ 岁小孩站在第 i 位，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$．如 a_i 岁小孩的后面有更小的孩子，就说 a_i 在 α 中越位．易知只有把所有越位小孩按方法 P 逐一往后移才能排成正规队形$(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．因此，有 k 人越位则至少得移位 k 次．另一方面，为排成正规队形，移位 k 次也已足够．移法如下：设 a_j 越位，即他后面有更小的小孩，其中最靠后头的是 a_k，则把 a_j 移到 a_k 后面．按此法逐一移位 k 次即成正规队形．因此，$\bar{S}(n,\ k)$等于有 k 人越位的 n 人队伍的种数．

把恰有 k 人越位的 n 人队伍分为两类. A_1: n 岁小孩押后, 此时其余 $n-1$ 人有 k 人越位, $|A_1|=\bar{S}(n-1, k)$. A_2: n 岁小孩不在最后, 此时他可在其余 $n-1$ 位站队, 但都越位, 而且别人是否越位与他的站位无关. 因此, 除开他, 则有 $k-1$ 人在 $n-1$ 人的队伍人中越位, 所以 $|A_2|=(n-1)\bar{S}(n-1, k-1)$. 由加法公式, 得递推关系式

$$\bar{S}(n, k)=\bar{S}(n-1, k)+(n-1)\bar{S}(n-1, k-1).$$

易知 $\bar{S}(n, n)=0$, $\bar{S}(n, 0)=1$. 最后, 用上式迭代, 得 $\bar{S}(6, 4)=274$. □

例 4～ 例 7 都是用分组法建立递推公式. 分组法是建立递推方程的主要方法, 它在下一节还将多次用到.

练 习 九

1. 平面上有 n 条直线, 任意两条不平行, 任意三条不共点. 求它们的交点个数 a_n 和它们把平面分成互不重叠的区域的个数 b_n.

2. 用 1 与 2 两种数字写 n 位数, 求其中任意相邻的两位不全是 1 的 n 位数的个数 f_n. 取 $n=10$.

3. 把 n 人分成 k 组, 每组至少 2 人, 其分法种数记为 $g(n, k)$. 证明: 当 $n\geqslant 3$ 时, $g(n, 2)=2^{n-1}-n-1$.

4. 数 1, 2, 3 可以写成 12 种乘积式(不限定 3 个数的顺序): (12)3, 1(23), (13)2, 1(32), (21)3, 2(13), (23)1, 2(31), (31)2, 3(12), (32)1, 3(21). 证明: n 个不同的数可写 $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$ 种乘积式.

5. 证明练习四第 12 题的 a_n 满足 $a_n=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$.

6. r 个不同的球分放 n 个不同的盒, 每盒数量不限. 假设每个盒子都是"有序"的, 即不但考虑每个盒子放进几个球, 放进哪些球, 还要考虑放进球时的先后次序. 求不同的放法种数 $f(r, n)$.

7. 从排成一行的 n 人中选 r 人, 这里 $2r<n$, 任意两人不相邻, 其选法种数记为 $f(n, r)$. 证明: $f(n, r)=f(n-1, r)+f(n-2, r-1)$.

8. 有男 $n+m+k$ 人, 女 $m+k$ 人, 这里 n、$m\geqslant 1$, $k\geqslant 0$, 其中有 k 对夫妻. 这 $n+2m+2k$ 人排成一列. 以 $f(n, m, k)$ 记其中夫妻相邻、女人不相邻且首尾都是

男人的排列种数. 证明:

$$f(n, m, k)=\frac{(2n+2m+k-1)!\,(n+m-1)!\,(n+m)!}{(2n+2m-1)!\,(n-1)!}.$$

9. 6×6 棋盘左上角有一棋子，每走一步，向右或向下移一格，以 $f(i, j)$ 记棋子走到位于第 i 行与第 j 列交叉处那一格的走法种数，求 $f(i, j)$.

10. 在 $n\times m$ 棋盘放 k 枚没有区别的车，这里 $k\leqslant\min\{n, m\}$，任意两枚车不能互相吃掉的放法种数记为 $f(n, m, k)$. 证明: 有递推公式

$$f(n, m, k)=f(n-1, m, k)+(m-k+1)f(n-1, m, k-1).$$

11. 在有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 格的 $n\times n$ 三角形棋盘上放 k 枚不能互相吃掉的车的放法种数记为 $f(n, k)$，求 $f(6, 4)$.

12. 队形 215346 可以通过 $1\leftrightarrow2$ (1、2 轮换位置)及 $3\to5\to4\to3$ (3、5、4 按箭号轮换位置)及 $6\leftrightarrow6$ 这 3 个轮换排成正序 123456. 以 B_n^k 记由数 1, 2, …, n 排成的队形中经 k 个轮换可以正序的队形全体，$f(n, k)=|B_n^k|$. 证明:

$$f(n, k)=f(n-1, k-1)+(n-1)f(n-1, k).$$

13. 写有号码 1, 2, …, m 的纸片各 n 张，同号码的 n 张纸片不加区别. 这 mn 张纸片排成一列，使得任意一张 k 号 $(k\leqslant m-1)$ 纸片，都有某张 $k+1$ 号纸片比它排得更前，以 B_m^n 记这种排列方法全体，求 $|B_m^n|=f(m, n)$.

14. r 个不同的球分放 n 个不同的盒里，每盒球数不限. 以 $g(r, n, m)$ 记恰有 m 个空盒的放法种数，这里 $m<n$，证明:

$$g(r, n, m)=(n-m)g(r-1, n, m)+(m+1)g(r-1, n, m+1).$$

15. r 个不同的球分放 n 个不同的盒里，每盒球数不限. 以 $f(r, n, m)$ 记至少有 m 个空盒的放法种数，这里 $m<n$，证明:

$$f(r, n, m)=C_n^m\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_{n-m}^k(n-m-k)^r\frac{m}{m+k}.$$

16. r 个不同的球分放 n 个不同的盒里，每盒至少一球，多则不限，其放法种数记为 $f(r, n)$，这里 $r\geqslant n$，证明:

$$f(r, n)=C_r^1 f(r-1, n-1)+C_r^2 f(r-2, n-1)+\cdots+C_r^{r-n+1}f(n-1, n-1).$$

十、递推方程

给定与自然数 n 有关的集合 A_n，它的元素个数记为 $f(n)$. 为了求出 $f(n)$，可以先建立数列 $\{f(n)\}$ 的递推公式，再设法确定 $f(n)$ 的值. 但是，由数列 $\{f(n)\}$ 的递推公式导出通项 $f(n)$ 的公式，并无普遍适用的方法. 本节介绍一类最简单、最常见的递推方程，即常系数线性递推方程，这类递推方程的解法简单易懂. 除了能用它解决某些计数问题外，而且对将来学习微积分、线性代数、常微分方程等都大有好处.

设有数列 $\{f(n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$. 如果存在 k 个常数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ a_k\neq 0$，使得

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n)=q(n), \qquad (1)$$

其中 $q(n)$ 是定义在非负整数集合 N_0 上的函数，则式(1)称为数列 $\{f(n)\}$ 的 k 阶常系数线性递推方程，简称 k 阶递推方程. $q(n)$ 称为方程(1)的自由项. 如果 $q(n)\equiv 0$，则方程(1)称为齐次的，否则称为非齐次的. 如果 N_0 上的函数 $f(n)$ 满足方程(1)，则 $f(n)$ 称为递推方程(1)的解.

先讨论二阶齐次递推方程

$$f(n+2)+a_1f(n+1)+a_2f(n)=0, \qquad (2)$$

其中 a_1、a_2 为常数，$a_2\neq 0$. 二次方程

$$x^2+a_1x+a_2=0 \qquad (3)$$

称为齐次方程(2)的特征方程，它的根称为齐次方程(2)的特征根.

关于二阶齐次递推方程(2)的解，有

定理1(通解定理) 设α_1、α_2是二阶齐次递推方程(2)的两个特征根，则函数$f(n)$是递推方程(2)的解的充分必要条件为$f(n)$可表成如下形式：

当$\alpha_1\neq\alpha_2$时，

$$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n, \tag{4}$$

当$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$时，

$$f(n)=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n, \tag{5}$$

其中β_1、β_2是常数.

证明 充分性. 当$\alpha_1\neq\alpha_2$时，把(4)式代入递推方程(2)的左边，因α_1，α_2是特征根，即$\alpha_j^2+a_1\alpha_j+a_2=0$，$j=1$，2，故

$$f(n+2)+a_1 f(n+1)+a_2 f(n)$$
$$=\beta_1\alpha_1^n(\alpha_1^2+a_1\alpha_1+a_2)+\beta_2\alpha_2^n(\alpha_2^2+a_1\alpha_2+a_2)=0,$$

即$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n$是递推方程(2)的解. 当$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$时，把(5)式代入(2)式左边，因$\alpha$是方程(3)的重根，$2\alpha+a_1=0$，故

$$f(n+2)+a_1 f(n+1)+a_2 f(n)$$
$$=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)+\beta_2\alpha^{n+1}(2\alpha+a_1)=0,$$

即$f(n)=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n$是递推方程(2)的解.

必要性. 设$f(n)$是递推方程(2)的解. 因α_1、α_2是特征根，由韦达定理，$\alpha_1+\alpha_2=-a_1$，$\alpha_1\alpha_2=a_2$. 代入(2)式，得

$$f(n+2)-(\alpha_1+\alpha_2)f(n+1)+\alpha_1\alpha_2 f(n)=0,$$

即得

$$f(n+2)-\alpha_1 f(n+1)=\alpha_2(f(n+1)-\alpha_1 f(n)), \tag{6}$$

$$f(n+2)-\alpha_2 f(n+1)=\alpha_1(f(n+1)-\alpha_2 f(n)). \tag{7}$$

当$\alpha_1\neq\alpha_2$时，记$F(n)=f(n)-\alpha_1 f(n-1)$，$G(n)=f(n)-\alpha_2 f(n-1)$，则(6)、(5)式化为

$$F(n+2)=\alpha_2 F(n+1),\quad G(n+2)=\alpha_1 G(n+1).$$

再用迭代法，或于等式两边取乘积，即可得到

$$F(n+1)=\alpha_2^n F(1), \quad G(n+1)=\alpha_1^n G(1),$$

从而有

$$f(n+1)-\alpha_1 f(n)=\alpha_2^n F(1),$$

$$f(n+1)-\alpha_2 f(n)=\alpha_1^n G(1).$$

两式相减，得

$$f(n)=\frac{\alpha_1^n G(1)-\alpha_2^n F(1)}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

记 $\beta_1=\dfrac{G(1)}{\alpha_1-\alpha_2}$、$\beta_2=\dfrac{-F(1)}{\alpha_1-\alpha_2}$，则有

$$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n,$$

其中 β_1、β_2 是与 n 无关的常数，且由 $f(0)$、$f(1)$ 唯一确定.

当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 时，(6)式与(7)式同为下式

$$f(n+2)-\alpha f(n+1)=\alpha(f(n+1)-\alpha f(n)).$$

令 $F(n)=f(n)-\alpha f(n-1)$，上式即写成

$$F(n+2)=\alpha F(n+1).$$

迭代，或两边分别自 $n=0$ 至 $n=k-2$ 取乘积，得 $F(k)=\alpha^{k-1}F(1)$，即有

$$f(k)=\alpha f(k-1)+\alpha^{k-1}F(1).$$

上式两边乘以 α^{n-k}，再自 $k=1$ 至 $k=n$ 取和：

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k+1}f(k-1)+n\alpha^{n-1}F(1),$$

从而得到

$$f(n)=\alpha^n f(0)+n\alpha^{n-1}F(1).$$

因 $a_2\neq 0$，故 $\alpha\neq 0$. 记 $\beta_1=f(0)$、$\beta_2=\dfrac{F(1)}{\alpha}$，则有

$$f(n)=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n,$$

其中 β_1、β_2 是与 n 无关的常数，且由 $f(0)$、$f(1)$ 唯一确定. □

(4)、(5)式中，依赖于常数 β_1、β_2 的解 $f(n)$ 称为二阶齐

次递推方程(2)的通解．如果已知初始条件$f(0)$、$f(1)$，则β_1、β_2由初始条件唯一确定．β_1、β_2虽可用前面的公式求得，但通常采用待定参数法确定．

一般地说，欲求满足初始条件的二阶齐次递推方程(2)的解$f(n)$，可采用如下步骤：

1．求特征根α_1、α_2，并写出通解：若$\alpha_1 \neq \alpha_2$，则

$$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n;$$

若$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$，则

$$f(n)=(\beta_1+n\beta_2)\alpha^n.$$

2．把初始条件代入通解形式，得关于β_1、β_2的线性方程组，并解出β_1、β_2.

这种方法把解二阶齐次递推方程的问题归结为求二次方程的根与二元一次方程组的解的代数问题，解法简单，易于掌握，而且不难推广到求解k阶齐次递推方程．

设k阶齐次常系数递推方程为

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n)=0, \qquad (8)$$

其中$a_k\neq 0$，它的特征方程定义为

$$x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k=0, \qquad (9)$$

方程(9)的根称为递推方程(8)的特征根．

定理2 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是$k$阶齐次递推方程(8)的全部不同的特征根，其重数依次为$e_1, \cdots, e_m$，这里$e_1+\cdots+e_m=k$，则函数$f(n)$是方程(8)的解的充分必要条件是$f(n)$可表成下述形式

$$f(n)=P_1(n)\alpha_1^n+P_2(n)\alpha_2^n+\cdots+P_m(n)\alpha_m^n,$$

其中$P_i(n)$是n的多项式，次数不超过e_i-1，这里$1\leqslant i\leqslant m$.

证明与定理1相仿，限于篇幅，这里从略．

[例1] $2\times n$ 棋盘用 n 张 1×2 长方形纸片覆盖，有多少种方法把棋盘完全盖住？假定棋盘的方格编了号(图 10-1)．

1	3					2n-1
2	4					2n

图 10-1

解 设所求完全覆盖方法种数为 F_n．分两种情形．1．1、2 两格被一张 1×2 纸片盖住，此时余下的 $2\times(n-1)$ 棋盘被 $n-1$ 张 1×2 纸片完全覆盖，有 F_{n-1} 种方法．2．1、3 两格被一张 1×2 纸片盖住，此时 2、4 两格也被一张 1×2 纸片盖住，而余下的 $2\times(n-2)$ 棋盘被 $n-2$ 张 1×2 纸片完全覆盖，有 F_{n-2} 种方法．因此，由加法公式，当 $n\geqslant 3$ 时，有 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$．记 $F_0=1$．因显然有 $F_1=1$，$F_2=2$，于是当 $n\geqslant 0$ 时有递推方程

$$F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0, \tag{10}$$

其特征方程为 $x^2-x-1=0$，两个特征根为

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad \alpha_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

由定理1，递推方程(10)的通解为 $F_n=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n$，代入 $F_0=1$、$F_1=1$，得

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2=1,\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=1.\end{cases}$$

解得 $\beta_1=\frac{\sqrt{5}}{5}\alpha_1$，$\beta_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}\alpha_2$．代入通解，求出

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}.$$

它的前几项是 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34． □

满足例1的递推公式(10)与初始条件 $F_0=1$，$F_1=1$ 的数列 $\{F_n\}$ 称为*斐波那契数列*，它是早在十三世纪由意大利的比萨人斐波那契(L. Fibonacci)首先提出的，是应用中最重要的数列之一．它有许多组合解释．比如，记 $N_{n-1}=\{1, 2, \cdots,$

$n-1\}$，则集合 N_{n-1} 中不含两个相邻整数的子集的个数便等于 F_n.

[例 2] 有 n 枚相同的棋子，甲、乙两人轮流取子，每次可取 1 至 2 枚，取完为止．求首尾两次都是甲取子的取法种数 $g(n)$．

解 考虑 $n+4$ 枚棋子．首尾两次都是甲取子，无非是下述三种情形之一．1．甲先取 1 子，乙再取 1 子，此时余下 $n+2$ 子，首尾两次都是甲取子，有 $g(n+2)$ 种取法．2．甲先取 1 子乙再取 2 子或甲先取 2 子乙再取 1 子，此时余下 $n+1$ 子，首尾两次都是甲取子，有 $2g(n+1)$ 种取法．3．甲先取 2 子，乙再取 2 子，此时余下 n 子，首尾两次都是甲取子，有 $g(n)$ 种取法．因此有四阶齐次递推方程

$$g(n+4)-g(n+2)-2g(n+1)-g(n)=0. \qquad (11)$$

因 $g(1)=g(2)=g(3)=1$, $g(4)=3$, 故若规定 $g(0)=0$, 则式(11)当 $n\geqslant 0$ 时成立．方程(11)的特征方程为 $x^4-x^2-2x-1=0$, 4 个特征根

$$\omega_1=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \qquad \omega_2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}),$$

$$\tau_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \tau_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),$$

其中 $i=\sqrt{-1}$. 因此方程(11)的通解为 $g(n)=\beta_1\omega_1^n+\beta_2\omega_2^n+\beta_3\tau_1^n+\beta_4\tau_2^n$, 其中 β_1、β_2、β_3、β_4 是待定常数．把初始条件 $g(0)=0$, $g(1)=g(2)=g(3)=1$ 代入通解，得方程组

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=0,\\ \beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\beta_3\tau_1+\beta_4\tau_2=1,\\ \beta_1\omega_1^2+\beta_2\omega_2^2+\beta_3\tau_1^2+\beta_4\tau_2^2=1,\\ \beta_1\omega_1^3+\beta_2\omega_2^3+\beta_3\tau_1^3+\beta_4\tau_2^3=1,\end{cases}$$

解得 $\beta_1=\frac{i}{2\sqrt{3}}\omega_1,\qquad \beta_2=-\frac{i}{2\sqrt{3}}\omega_2,$

$$\beta_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}\tau_1,\qquad \beta_4=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\tau_2,$$

从而得

$$g(n)=\frac{i}{2\sqrt{3}}\omega_1^{n+1}-\frac{i}{2\sqrt{3}}\omega_2^{n+1}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\tau_1^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\tau_2^{n+1}.$$

它的前几项是 0, 1, 1, 1, 3, 4, 6, 11, 17, 27, 45, 72, 116. □

顺便指出，例 2 中的 $\{g(n)\}$ 是整数序列，但其通项却是用复数形式表出，和前面的斐波那契数列的通项是用无理数形式表出的事实相比较，当然是很有趣味的.

最后简单介绍非齐次递推方程的解法.

定理 3 设 $f_0(n)$ 是 k 阶非齐次递推方程

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+\cdots+a_kf(n)=q(n) \qquad (12)$$

的一个解，而 $g(n)$ 是方程(12)对应的齐次方程

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+\cdots+a_kf(n)=0$$

的通解，则方程(12)的通解是

$$f(n)=g(n)+f_0(n).$$

证明很容易，读者可自证之. 这里从略.

定理 3 中的 $f_0(n)$ 称为非齐次方程(12)的一个特解. 定理 3 表明，求解非齐次递推方程可依下述步骤进行：

1. 求出相应的齐次方程的通解 $g(n)$；
2. 求出非齐次方程的一个特解 $f_0(n)$；
3. 写出非齐次方程的通解 $f(n)=g(n)+f_0(n)$，再用待定参数法，把初始条件代入通解，确定其中的参数.

应当指出，对一般的 $q(n)$，并无普遍适用的求 $f_0(n)$ 的方法. 不过，当 $q(n)$ 是多项式或指数函数时，$f_0(n)$ 可相应地取为多项式或指数函数. 特别有

定理 4 设一阶非齐次递推方程

$$f(n+1)+af(n)=q(n) \tag{13}$$

的自由项 $q(n)$ 是 n 的 m 次多项式，则当 $a\neq -1$ 时，方程(13)有一个 n 的 m 次多项式的特解 $f_0(n)$；当 $a=-1$ 时，方程(13)有一个 n 的 $m+1$ 次多项式的特解 $f_0(n)$.

证明 前半部分的证明留给读者，仅证后半部分. 当 $a=-1$ 时，递推方程(13)即为

$$f(n+1)-f(n)=q(n), \tag{14}$$

自由项为 n 的 m 次多项式 $q(n)=\sum\limits_{l=0}^{m}b_l n^l$. 取 n 的 $m+1$ 次多项式

$$f_0(n)=\sum_{k=1}^{m+1}\beta_k n^k, \tag{15}$$

其中 β_1, β_2, $\cdots$, β_{m+1}是待定常数. 把上式代入式(14)，得

$$\sum_{k=1}^{m+1}\beta_k[(n+1)^k-n^k]=\sum_{l=0}^{m}b_l n^l,$$

由二项式展开，上式化成

$$\sum_{k=1}^{m+1}\beta_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j n^j\right)=\sum_{l=0}^{m}b_l n^l.$$

比较上式两边的系数，可得关于 β_1, β_2, $\cdots$, β_{m+1} 的方程组

$$\begin{cases} C_1^0\beta_1+C_2^0\beta_2+C_3^0\beta_3+\cdots+C_m^0\beta_m+C_{m+1}^0\beta_{m+1}=b_0, \\ C_2^1\beta_2+C_3^1\beta_3+\cdots+C_m^1\beta_m+C_{m+1}^1\beta_{m+1}=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_m^{m-1}\beta_m+C_{m+1}^{m-1}\beta_{m+1}=b_{m-1}, \\ C_{m+1}^m\beta_{m+1}=b_m, \end{cases}$$

其系数行列式等于 $C_1^0C_2^1\cdots C_m^{m-1}C_{m+1}^m\neq 0$，故有唯一解. 也可直接自下而上地逐一解出 β_{m+1}, β_m, $\cdots$, β_1. 因此，方程(14)具有由式(15)给出的特解 $f_0(n)$, $f_0(n)$为 n 的 $m+1$ 次多项式. □

方程(14)相应的齐次方程有通解 $g(n)=\beta_0$, 故方程(14)的通解为

$$f(n)=g(n)+f_0(n)=\sum_{k=0}^{m+1}\beta_k n^k,$$

其中 β_0 是任意常数，由方程的初始条件唯一确定.

[例 3] 有甲、乙、丙三根木桩，n 个圆盘，中间都有小洞，套在甲木桩上，圆盘尺寸由上到下一个比一个大，最大的圆盘放在底部. 按下面的规则移动圆盘：每次只能把套在最上面的一个圆盘从一根木桩移到另一根木桩，但大圆盘不能放在小圆盘上面. 求把 n 个圆盘从甲木桩全部移到乙木桩最少要移动的次数 $f(n)$.

解 把 n 个圆盘按规则以最少的移动次数全部移到乙木桩上，其过程可分成三步：先把甲木桩的上头 $n-1$ 个圆盘以最少的移动次数全部移到丙木桩上，要移动 $f(n-1)$ 次；再把最大的圆盘从甲木桩移到乙木桩，最少次数为 1；最后把丙木桩上的 $n-1$ 个圆盘以最少的移动次数全部移到乙木桩，要移 $f(n-1)$ 次. 因此，有一阶非齐次递推方程

$$f(n+1)-2f(n)=1, \tag{16}$$

其初始条件 $f(1)=1$. 方程(16)的自由项是 1，即为 0 次多项式，且属(13)式形式，$\alpha\neq-1$，故可令 $f_0(n)=\beta$，代入(16)式，求得 $f_0(n)=-1$. 方程(16)相应的齐次方程的特征根 $\alpha=2$，因此可令 $f(n)=\mu\cdot 2^n-1$，代入初始条件 $f(1)=1$，求得 $\mu=1$，故 $f(n)=2^n-1$. □

[例 4] 空间中有 n 个平面，任意 2 个交于一直线，任意 3 个交于一点，任意 4 个不共点(称这 n 个平面处于普通位置). 这 n 个平面把空间分成多少个不相重叠的几何体？

解 先考虑点与直线的关系. 显然，直线上 n 个点把直线分成不相重叠的 $f_1(n)=n+1$ 部分(线段或半直线). 再看直线与平面的关系. 设平面上 n 条两两相交于一点但任意 3 条

不共点的直线(称这 n 条直线处于普通位置)把平面分成 $f_2(n)$ 个不相重叠的区域，易知

$$f_2(n+1)=f_2(n)+f_1(n). \tag{17}$$

最后考虑平面与空间的关系. 设空间中 n 个处于普通位置的平面把空间分成 $f_3(n)$ 个不相重叠的几何体. 现添加一个平面 π，它与这 n 个平面共处于普通位置. 平面 π 与这 n 个平面都有 1 条交线，这 n 条交线在平面 π 上处于普通位置，故把平面 π 分成 $f_2(n)$ 个不相重叠的区域，而 π 上的每个平面区域把原来的一个几何体分割成两个，所以有

$$f_3(n+1)=f_3(n)+f_2(n). \tag{18}$$

把 $f_1(n)=n+1$ 代入(17)式，得一阶非齐次递推方程

$$f_2(n+1)-f_2(n)=n+1, \tag{19}$$

属(14)式的形式，其中 $q(n)$ 是 n 的一次多项式，故令 $f_2(n)=\mu_2n^2+\mu_1n+\mu_0$，其中 μ_0、μ_1、μ_2 是待定常数. 代入(19)式，比较系数，有 $2\mu_2=1$，$\mu_2+\mu_1=1$，解得 $\mu_2=\mu_1=\frac{1}{2}$. 又因 $f_2(1)=2$，故 $\mu_0=1$. 所以

$$f_2(n)=\frac{1}{2}n(n+1)+1. \tag{20}$$

由(20)式与(18)式，得一阶非齐次递推方程

$$f_3(n+1)-f_3(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1, \tag{21}$$

属(14)式的形式，自由项 $q(n)$ 是 n 的二次多项式，故令

$$f_3(n)=\beta_3n^3+\beta_2n^2+\beta_1n+\beta_0,$$

其中 β_0、β_1、β_2、β_3 是待定常数. 代入(21)式，比较系数，有 $3\beta_3=\frac{1}{2}$，$3\beta_3+2\beta_2=\frac{1}{2}$，$\beta_3+\beta_2+\beta_1=1$，解得 $\beta_3=\frac{1}{6}$，$\beta_2=0$，$\beta_1=\frac{5}{6}$. 又因 $f_3(1)=2$，故 $\beta_0=1$，所以得到

$$f_3(n)=\frac{1}{6}n(n^2+5)+1.$$ □

例 4 的结论可以推广到 m 维欧氏空间中去.

[例 5]　有一个凸 $n+4$ 边形($n\geqslant 0$), 任意 3 条对角线在其内部不共点. 以 $f(n)$ 记所有对角线把这凸 $n+4$ 边形分成不相重叠的区域个数, 求 $f(n)$.

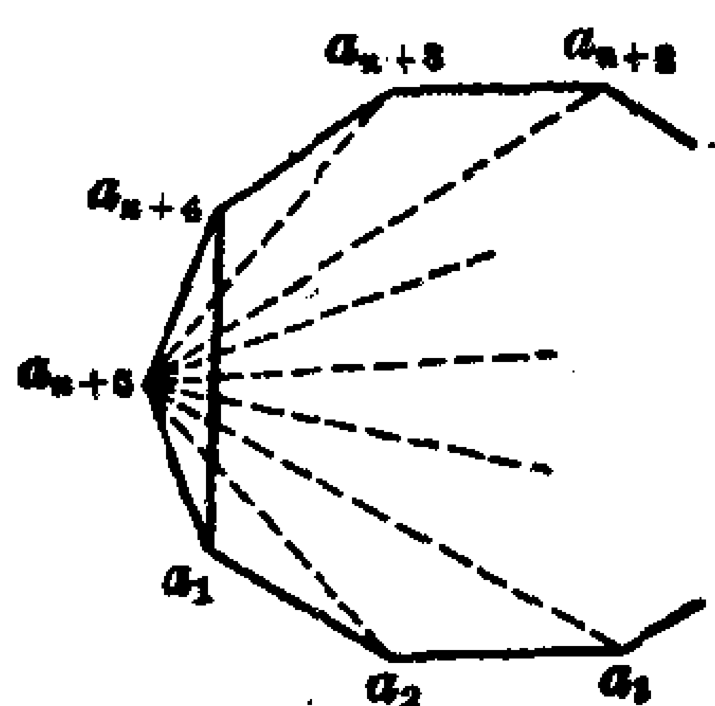


图 10-2

解　以点 a_1、a_2、a_3、…、a_{n+2}、a_{n+3}、a_{n+4} 为顶点的凸 $n+4$ 边形满足题设, 它的所有对角线把凸 $n+4$ 边形分成 $f(n)$ 个区域. 现增加一点 a_{n+5}(图 10-2), 它与原来的 $n+4$ 点构成一凸 $n+5$ 边形的顶点, 且这 $n+5$ 边形的任意 3 条对角线不共点, 这些对角线把凸 $n+5$ 边形分成 $f(n+1)$ 个区域. 下面求 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系. 凸 $n+4$ 边形所有对角线的交点有 C_{n+4}^4 个, 凸 $n+5$ 边形所有对角线的交点有 C_{n+5}^4 个. 因此, 当在凸 $n+4$ 边形上添加点 a_{n+5} 后, 在凸 $n+4$ 边形的对角线及边 a_1a_{n+4} 上产生了 $C_{n+5}^4-C_{n+4}^4$ 个新交点, 从而在凸 $n+4$ 边形内增加了 $C_{n+5}^4-C_{n+4}^4$ 个区域. 另外, a_1a_{n+4} 上的 $n+2$ 个交点与点 a_{n+5} 的联线把 $\triangle a_1a_{n+4}a_{n+5}$ 分为 $n+3$ 个区域, 所以总共增加了

$$C_{n+5}^4-C_{n+4}^4+n+3=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{16}{3}n+7$$

个区域. 故有一阶非齐次递推方程

$$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{16}{3}n+7. \qquad (22)$$

这是(14)式的形式, 自由项是 n 的 3 次多项式. 令

$$f(n)=\mu_4n^4+\mu_3n^3+\mu_2n^2+\mu_1n+\mu_0, \qquad (23)$$

代入(22)式, 比较系数, 得方程组

$$\begin{cases} 4\mu_4=\dfrac{1}{6}, \\ 6\mu_4+3\mu_3=\dfrac{3}{2}, \\ 4\mu_4+3\mu_3+2\mu_2=\dfrac{16}{3}, \\ \mu_4+\mu_3+\mu_2+\mu_1=7. \end{cases}$$

解出 $\mu_4=\frac{1}{24}$，$\mu_3=\frac{10}{24}$，$\mu_2=\frac{47}{24}$，$\mu_1=\frac{110}{24}$，再由 $f(0)=4$，又得 $\mu_0=4$，因此得到

$$f(n)=\frac{1}{24}(n^4+10n^3+47n^2+110n)+4. \qquad \square$$

［例 6］ $1\times n$ 棋盘上的 n 个方格用 m 种颜色填色($m\geqslant 2$)，其中有一种是红色．求红格数被 3 整除的填色法种数 $f(n)$．

解 以 $g(n)$ 记红格数除 3 余 1 的填色法种数，以 $h(n)$ 记红格数除 3 余 2 的填色法种数．很明显，

$$f(n)+g(n)+h(n)=m^n. \tag{24}$$

红格数被 3 整除的填色法可分三类：1．前 $n-2$ 格中红格数被 3 整除，此时最后两格只能填其他颜色，有 $(m-1)^2f(n-2)$ 种填法；2．前 $n-2$ 格中红格数被 3 除余 1，此时最后两格必都填红色，有 $g(n-2)$ 种填法；3．前 $n-2$ 格中红格数被 3 除余 2，此时最后两格只有 1 个红格，有 $2(m-1)h(n-2)$ 种填法．因此

$$f(n)=(m-1)^2f(n-2)+g(n-2)+2(m-1)h(n-2). \tag{25}$$

红格数被 3 整除的填色法也可分为下述两类：1．前 $n-1$ 格中红格数被 3 整除，有 $(m-1)f(n-1)$ 种填法；2．前 $n-1$ 格中红格数除 3 余 2，有 $h(n-1)$ 种填法．因此又有

$$f(n)=(m-1)f(n-1)+h(n-1). \tag{26}$$

由(24)、(25)、(26)式可得二阶非齐次递推方程

$$f(n+2)-(2m-3)f(n+1)+(m^2-3m+3)f(n)=m^n. \tag{27}$$

先求相应的齐次方程的通解. 它的特征方程是

$$x^2-(2m-3)x+(m^2-3m+3)=0,$$

两个特征根为

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(2m-3+i\sqrt{3}),$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}(2m-3-i\sqrt{3}),$$

其中$i=\sqrt{-1}$. 因此,相应的齐次方程的通解为

$$g(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n,$$

其中 β_1、β_2 是常数. 再求方程(27)的一个特解. 因非齐次方程(27)的自由项是 n 的指数函数, 故可令 $f_0(n)=\beta m^n$, 其中 β 是待定常数. 代入(27)式, 得 $\beta=\frac{1}{3}$. 依定理3, 最后可令

$$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n+\frac{1}{3}m^n. \tag{28}$$

其中 β_1、β_2 是待定常数, 由初始条件确定. 易知$f(1)=m-1$, $f(2)=(m-1)^2$, 若取$f(0)=1$, 则当 $n\geqslant0$ 时, (27)式成立. 把初始条件$f(0)=1$、$f(1)=m-1$ 代入(27)式, 可算得

$$\beta_1=\beta_2=\frac{1}{3},$$

所以

$$f(n)=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2m-3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{2m-3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n+m^n\right].$$

□

练 习 十

1. 有一楼梯共 n 级，每跨一步，只能跨上 1 级或 2 级，要登上最后一级，有多少种走法 F_n?

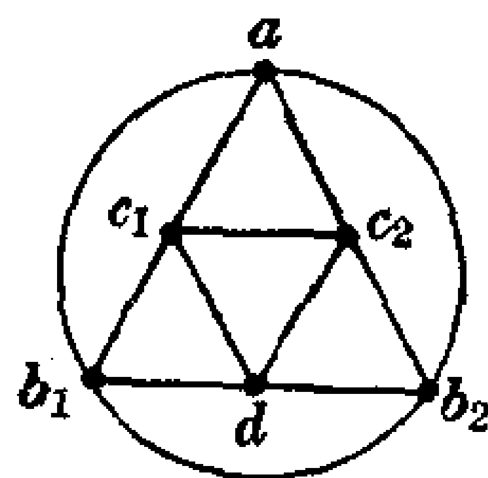
2. 由红、黑、白三种颜色的球排成一列，共 n 个球，任意两个白球不相邻，求排列方法种数 b_n.

3. 点 a、b、c、d、e、f、g、h 在一圆周上依次排列. 质点 M 沿此圆周移动，每一步从 8 点中的某一点向其邻点转移，但到点 e 后就停止不动. 以 e_n 记质点从点 a 出发，经 n 步后才落在点 e 上的转移方式种数，求 e_{2m}.

4. 一圆盘分成 n 个编号自 1 到 n 的扇形，用 k 种颜色填色，相邻扇形不同色，求填色法种数 a_n.

5. 利用递推方程的解法，求解本书第 73 页例 3.

6. 一质点在下图中的点 a、b_1、b_2、c_1、c_2、d 上移动，每一步质点由某一点沿图中联线向邻点移动. 求从点 a 出发经 n 步后回到点 a 的移动方式种数 $f(n)$.



(第 6 题图)

7. 把正三角形的三边各 $m+1$ 等分，联结邻边的等分点使与第三边平行，这些联线与原三角形的三边组成一个三角网. 以 $f(m)$ 记此三角网中三角形的个数(不同的三角形可以叠交). 求 $f(2k+1)$ 与 $f(2k)$.

8. 在 $n\times n$ 棋盘中可以数出多少个正方形? 不同的正方形可以叠交.

9. 从 n 条长度分别为 1、2、3、…、n 单位长的线段中取 3 条，不许重复，求以取出的 3 条线段为边能构成三角形的取法种数 $f(n)$，对 $n=2m-1$ 给出答案.

10. 用 1、2、3、4 四种数字写 n 位数，以 a_n 记其中含偶数个 1 的 n 位数的数目，求 a_n.

11. 用递推方程法解本书第 34 页例 3 之 ii.

十一、母 函 数

大家知道，从 n 个不同的元素中取 k 个元素的组合数是 C_n^k，当 n 固定而 k 变动时，便得有限数列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^k,\ \cdots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n.$$

由数列 $\{C_n^k,\ 0\leqslant k\leqslant n\}$ 可以构作一个多项式

$$f(x)=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n,$$

由二项式定理，$f(x)=(1+x)^n$. 由于 $f(x)=(1+x)^n$ 展开后其 $n+1$ 个系数即为数列 $\{C_n^k\}$，即生成数列 $\{C_n^k\}$，因此函数 $f(x)=(1+x)^n$ 称为数列 $\{C_n^k\}$ 的生成函数或母函数.

一般地说，给定有限数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots,\ a_n,$$

多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n$$

称为数列 $\{a_k\}$ 的母函数. 更一般地，给定无穷数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots, \tag{1}$$

形式上构造幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots, \tag{2}$$

则 $f(x)$ 称为数列 $\{a_k\}$ 的母函数.

给定一个与自然数 k 有关的集合 A_k，求它的元素个数 $|A_k|=a_k$，可以看成求数列 $\{a_k\}$ 的通项公式. 母函数为求数列的通项公式提供了一种方法，即从数列 $\{a_k\}$ 的意义出发，构造出它的母函数 $f(x)$；然后把母函数 $f(x)$ 展成幂级数，其中 x^k 的系数便是欲求的 a_k.

因此，用母函数方法解计数问题关键在于解决：

1．如何根据数列$\{a_k\}$的意义，求出它的母函数？

2．如何把母函数 $f(x)$展成多项式或幂级数？

这两个问题的解决办法下面将通过例子来加以说明.

十八世纪，欧拉在研究正整数的分拆数时，首先广泛使用母函数方法.不过，母函数的一般方法却是十九世纪初拉普拉斯在研究概率问题时发展起来的．母函数方法实质上是一种变换法，它把数列$\{a_k\}$变换为函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

通过这种变换，把对数列的研究转化为对函数的研究，从而可以引用函数论的有关知识．母函数是概率论中第一个被系统应用的变换法，数列$\{a_k\}$的母函数的一种自然的推广，导致概率论中引进强有力的新工具——特征函数．特征函数法也是一种变换法，它把分布函数变换成它的特征函数，从而把对分布函数的研究转化为对它的特征函数的研究．这种转化往往带来很大好处．拉普拉斯变换，富里埃 (J. B. J. Fourier) 变换，都是母函数方法的推广．它们都是积分变换，在许多数学分支以及工程技术等方面有广泛的应用.

在应用母函数方法时，除上面提到的二项式定理

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n \qquad (3)$$

外，还常用到所谓牛顿(I. Newton)二项式定理．牛顿二项式定理是公式(3)的推广，它是牛顿于 1676 年得到的.下面的两个公式是其特例．我们常要用到公式 1．公式 2 用于例 5.

公式 1　设 n 为正整数，则

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kx^k,\quad 其中 -1<x<1. \qquad (4)$$

公式 2

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$$

$$-\cdots-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k-\cdots,\ -1\leqslant x\leqslant 1, \quad (5)$$

其中 $(2k-3)!!=(2k-3)(2k-5)(2k-7)\cdots 3\cdot 1$,

$$(2k)!!=(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2.$$

牛顿二项式定理的证明,可在一般微积分书上查到,这里从略. 在引用(4)、(5)式时,不考虑其收敛性,而只把它当作形式的幂级数. 因此,不妨对(4)式进行形式验算. 比如,因

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$
$$=1+(1-1)x+(1-1)x^2+(1-1)x^3+\cdots,$$

右边 x, x^2, x^3, $\cdots$ 的系数都是 $1-1=0$, 即右边为 1, 所以

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

读者不妨对 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 作形式验算.

[例 1] 丢掷三颗骰子,求出现点数之和分别是 11、12、13 的丢掷结果种数 a_{11}、a_{12}、a_{13}. 假定骰子是可以区别的.

解 三颗骰子编号 1、2、3. 丢掷结果可用 3 元有序数组 (l_1, l_2, l_3) 来表示: i 号骰子出现点数 l_i, 这里 $1\leqslant l_i\leqslant 6$, $i=1, 2, 3$. 记出现点数之和为 k 的丢掷结果全体为 A_k, 则丢掷结果 $(l_1, l_2, l_3)\in A_k$ 的充分必要条件是

$$l_1+l_2+l_3=k,\quad 1\leqslant l_1,\ l_2,\ l_3\leqslant 6. \quad (6)$$

记 $|A_k|=a_k$. 因 $k=l_1+l_2+l_3$, $1\leqslant l_1, l_2, l_3\leqslant 6$, 故 $3\leqslant k\leqslant 18$. 现求数列

$$a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots,\ a_{18} \quad (7)$$

的母函数. 考虑函数

$$f(x)=(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\cdot(x^1+x^2+x^3$$
$$+x^4+x^5+x^6)\cdot(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6).$$

设丢掷结果$(l_1, l_2, l_3)\in A_k$，则l_1、l_2、l_3适合(6)式，在函数$f(x)$的三个因子中，依次取出x^{l_1}、x^{l_2}、x^{l_3}，它们的乘积$x^{l_1+l_2+l_3}=x^k$，即为$f(x)$的展开式提供一个x^k. 反之，$f(x)$的展开式中的每一个x^k均由这种方式得到. 因此，函数$f(x)$的展开式中x^k的系数等于a_k，即$f(x)$是数列(7)的母函数.

为求a_k，可将$f(x)$展开. 因为

$$f(x)=x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$$
$$=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3},$$

应用公式1，

$$f(x)=x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})$$
$$\cdot(1+C_3^1x+C_4^2x^2+C_5^3x^3+C_6^4x^4+\cdots),$$

由此算得$a_{11}=C_{10}^8-3C_4^2=27$，$a_{12}=C_{11}^9-3C_5^3=25$，$a_{13}=C_{12}^{10}-3C_6^4=21$. □

例1从数列$\{a_k\}$的意义出发，直接作出它的母函数

$$f(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3,$$

其中三个因子代表三颗骰子，因子中的和项x^1，x^2，x^3，x^4，x^5，x^6代表骰子的六个面，点数是1，2，3，4，5，6. 把母函数展成幂级数时用到牛顿二项式定理.

由数列$\{a_k\}$的意义直接作出它的母函数$f(x)$，这是寻找母函数的主要手段. 下面两例也采用这个方法. 把母函数$f(x)$展成幂级数的主要工具是牛顿二项式定理.

[例2] 一张币值为二角的人民币兑换成硬币，有多少种兑换方法？币值为五角的人民币有多少种兑换方法？假定硬币只有一分、二分和五分三种.

解 以A_k记一张k分币值的人民币用硬币兑换的方法全体. A_k中的元素用3元有序数组(l_1, l_2, l_3)表示：一分的l_1枚，二分的l_2枚，五分的l_3枚，$l_1+2l_2+5l_3=k$. 记$|A_k|=a_k$.

作与例1类似的分析，不难知道数列$\{a_k\}$的母函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\cdot(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots).$$

三个因子依次代表一分、二分、五分硬币，从第一个因子取出x^{l_1}，从第二个因子取出x^{2l_2}，从第三个因子取出x^{5l_3}作乘积$x^{l_1+2l_2+5l_3}$，如果$l_1+2l_2+5l_3=k$，则代表币值为k分的人民币的一种兑换方法：一分l_1枚，二分l_2枚，五分l_3枚.

应用公式1，先把母函数$f(x)$改写成

$$\begin{aligned}f(x)&=(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)\\&=(1-x)^{-2}(1+x)^{-1}(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots),\end{aligned}$$

再应用公式1把母函数$f(x)$展开，

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)(1-x+x^2-x^3+\cdots)\\&\quad\cdot(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)\\&=[(1+x)+2(x^2+x^3)+\cdots+(k+1)(x^{2k}+x^{2k+1})\\&\quad+\cdots](1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots).\end{aligned}$$

由此即可算出$f(x)$的展开式中x^{20}与x^{50}的系数分别为

$$a_{20}=1+3+6+8+11=29,$$

$$\begin{aligned}a_{50}&=1+3+6+8+11+13+16+18\\&\quad+21+23+26=146.\end{aligned}$$ □

［例3］ 在空间直角坐标系$Ox_1x_2x_3$中，以$A(8,0,0)$、$B(0,8,0)$、$E(0,0,8)$、$F(0,0,-8)$、$D(0,-8,0)$、$C(-8,0,0)$这六点为顶点的八面体记为V，求八面体V中(包括表面)的格点的个数b_8.

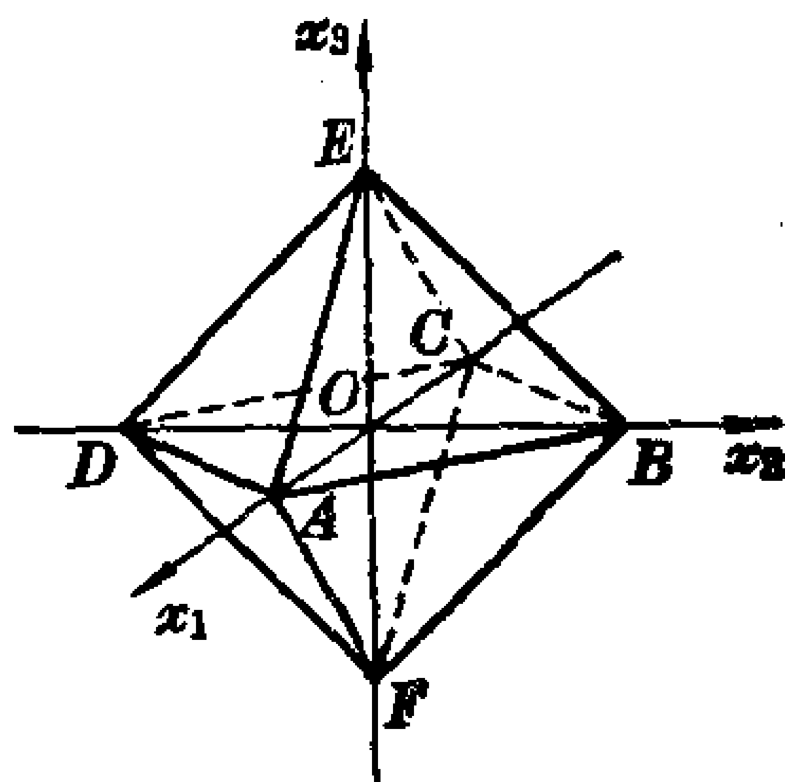


图 11-1

解 很明显，格点$(x_1,x_2,x_3)\in V$的充要条件为整数x_1、x_2、x_3满足$|x_1|+|x_2|+|x_3|\leqslant 8$. 以$A_k$记适合$|x_1|+$

$|x_2|+|x_3|=k$ 的格点全体，$|A_k|=a_k$，则有 $b_8=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$. 因此，我们转而求数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots$$

的通项 a_k. 考查函数

$$f(t)=(t^0+2t^1+2t^2+\cdots)(t^0+2t^1+2t^2+\cdots)\cdot(t^0+2t^1+2t^2+\cdots)$$

第 i 个因子中的 t^0、$2t^1$、$2t^2$、$2t^3$、$2t^4$、$\cdots$ 依次代表 x_i 取 0、±1、±2、±3、±4、$\cdots$；$i=1, 2, 3$. 从三个因子依次取出 $2t^1$、$2t^3$、$2t^4$ 作乘积得到 $(2t^1)(2t^3)(2t^4)=8t^8$，则对应着 $(\pm1, \pm3, \pm4)$ 这 8 个格点；同样，从三个因子依次取出 t^0、$2t^4$、$2t^4$ 作乘积得 $4t^8$，则对应着 $(0, \pm4, \pm4)$ 这 4 个格点；余类推. 因此，A_k 的元素的个数 $|A_k|=a_k$ 是 $f(t)$ 展开式中 t^k 的系数，即 $f(t)$ 是数列 $\{a_k\}$ 的母函数. 由公式 1，

$$(1+t)(1-t)^{-1}=(1+t)(1+t+t^2+t^3+\cdots)$$
$$=1+2t+2t^2+2t^3+2t^4+\cdots.$$

于是，可以再用公式 1，把 $f(t)$ 改写为

$$f(t)=(1+t)^3(1-t)^{-3}$$
$$=(1+3t+3t^2+t^3)(1+C_3^1t+C_4^2t^2+C_5^3t^3+\cdots).$$

由此即可算得 $a_0=1$, $a_1=6$, $a_2=18$, $a_3=38$, $a_4=66$, $a_5=102$, $a_6=146$, $a_7=198$, $a_8=258$, 从而 $b_8=833$.

也可直接求数列 $\{b_k\}$ 的母函数. 已知数列 $\{a_k\}$ 的母函数为 $f(t)$，因 $b_k=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k$，故数列 $\{b_k\}$ 的母函数为

$$g(t)=f(t)(1+t+t^2+t^3+\cdots)$$
$$=(1+t)^3(1-t)^{-3}(1-t)^{-1}=(1+t)^3(1-t)^{-4}$$
$$=(1+3t+3t^2+t^3)(1+C_4^1t+C_5^2t^2+C_6^3t^3+\cdots),$$

由此可得 $b_8=C_8^5+3C_9^6+3C_{10}^7+C_{11}^8=833$. □

寻找母函数还有另一种重要方法：从数列 $\{a_k\}$ 的意义入

手，先建立$\{a_k\}$的递推公式，再由递推公式导出母函数$f(x)$所满足的方程，并解出$f(x)$。下面的例4和例5即用此法。

[例4] 有$n-1$张纸片，编号1, 2, 3, …, $n-1$. 从这$n-1$张中任意选出若干张(也可一张也不选)，但其中没有邻号的，求选法种数f_n.

解 显然$f_2=2$, $f_3=3$. 设$n\geqslant 2$，把$n+1$张编号自1至$n+1$的纸片符合题设的选法分为两组. A_1: $n+1$号被选上，此时n号不能入选，而其余$n-1$张可入选，有f_n种选法；A_2: $n+1$号未选上，此时其余n张可入选，有f_{n+1}种选法，因此$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. 若记$f_0=f_1=1$，则当$n\geqslant 0$时，有递推公式

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n. \tag{8}$$

注意，这里的$\{f_n\}$恰与本书第85页例1中的数列$\{F_n\}$适合相同的递推公式和初始条件，故是斐波那契数列. 现用母函数法求f_n. 设数列$\{f_n\}$的母函数为$F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_nx^n$. 以$x^{n+2}$乘(8)式并取和

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+2}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^{n+2}.$$

上式的三项依次是$F(x)-f_1x-f_0$, $xF(x)-f_1x$, $x^2F(x)$，故

$$(1-x-x^2)F(x)=1,$$

于是求得数列$\{f_n\}$的母函数

$$F(x)=(1-x-x^2)^{-1}.$$

把母函数$F(x)$展开求通项f_n. 由公式1,

$$\begin{aligned}F(x)&=[1-x(1+x)]^{-1}\\&=1+x(1+x)+x^2(1+x)^2+\cdots+x^n(1+x)^n+\cdots\\&=C_0^0+x(C_1^0+C_1^1x)+x^2(C_2^0+C_2^1x+C_2^2x^2)+\cdots\\&\quad+x^n(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)+\cdots,\end{aligned}$$

由此可算出：$f_0=C_0^0=1$, $f_1=C_1^0=1$, $f_2=C_1^1+C_2^0=2$, $f_3=C_2^1+$

$C_3^0=3$, $f_4=C_2^2+C_3^1+C_4^0=5$, $f_5=C_3^2+C_4^1+C_5^0=8$, 等等. 仍以 $[x]$ 表示不小于 x 的最小整数, 则一般地有

$$f_n=C_{n'}^{n-n'}+C_{n'+1}^{n-n'-1}+\cdots+C_{n-1}^1+C_n^0. \tag{9}$$

其中 $n'=\left[\frac{n}{2}\right]$. (9)式给出斐波那契数列的另一种通项公式.

若记 $\tau_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\tau_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, 则可把母函数 $F(x)$ 改写成

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left(\frac{1}{1-\tau_1 x}-\frac{1}{1-\tau_2 x}\right),$$

再用公式 1, 从而得

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tau_1^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\tau_2^{n+1}\right)x^n,$$

因此

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \qquad \square$$

[例 5] 某公张三, 他及其后代不论男女皆编入家谱, 但他及后代的配偶都不编入家谱. 家谱只标明该成员是男或女以及他们之间的父子(女)、母子(女)关系. 已知张三家谱上共有 n 名男女成员, 每个成员至多有两个子女, 而且若有两个子女, 则必一男一女. 问张三的家谱有多少种可能?

解 张三的家谱可用类似于下面的树形图表示. 这种家谱可如下作出: 每位成员用黑点表示; 有父子(女)、母子(女)关系者用线段联结; 任一成员的儿子画在该成员的左下方, 女儿画在右下方. 形如图 11-2 的树形图称为二元树.

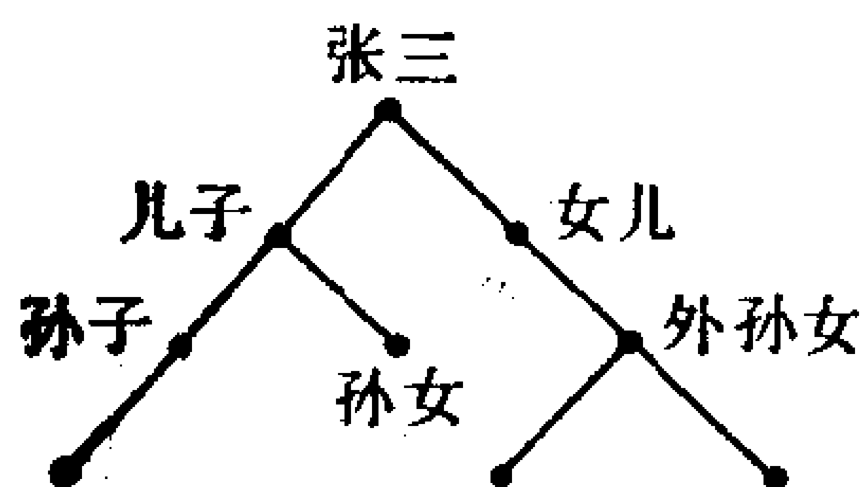


图 11-2

以 a_n 记所求的家谱种数. 显然 $a_1=1$, $a_2=2$. 记 $a_0=1$. 现考虑 $n\geqslant 3$. 把家谱中的张三划掉, 变成张三的儿子及女儿

的两张家谱图，有下述各种可能情况．张三的儿子一系有 k 人，其家谱图有 a_k 种可能，此时张三的女儿一系有 $n-k-1$ 人，其家谱图有 a_{n-k-1} 种可能，即共有 $a_k a_{n-k-1}$ 种可能，其中 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$．于是有递推公式

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_k a_{n-k-1} + \cdots + a_{n-1} a_0.$$

设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，因 $a_0=a_1=1$，故

$$\begin{aligned} xf^2(x) &= x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots)^2 \\ &= a_0^2 x + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0) x^n + \cdots \\ &= a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = f(x) - 1, \end{aligned}$$

即母函数 $f(x)$ 适合方程 $xf^2(x)-f(x)+1=0$. 用求根公式得 $2xf(x)=1\pm\sqrt{1-4x}$，但因 $f(0)=a_0=1$，故有 $2xf(x)=1-\sqrt{1-4x}$，从而

$$f(x)=(2x)^{-1}(1-\sqrt{1-4x}). \tag{10}$$

应用公式 2，把 $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ 展开，并代入(10)式，则可得到(详细演算过程从略)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} x^n,$$

从而得通项公式 $a_n=\dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$，$n\geqslant 0$．即为本书第42页例2中的卡塔朗数列． □

以上介绍的母函数称为普通母函数．除普通母函数外，还有另一种形式的母函数——指数型母函数．

给定数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots, \tag{11}$$

形式地构造幂级数

$$f(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots, \qquad (12)$$

则 $f(x)$ 称为数列(11)的指数型母函数，简称指母函数.

形式地定义

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots. \qquad (13)$$

若以 $-x$ 代上式的 x，可形式地得到

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots. \qquad (14)$$

由上面两式相减及相加，又可分别形式地得到

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots. \qquad (16)$$

另外，不难由 e^x 的定义形式地导出

$$e^{lx}\cdot e^{mx}=e^{(l+m)x}, \qquad (17)$$

从而又可形式地导出

$$(e^x)^m=e^{mx}. \qquad (18)$$

以上各式在指母函数方法中经常用到. 这些公式的严格证明，都可在一般微积分教科书中找到. 因为在母函数方法中只考虑级数的形式运算，所以对我们的目的而言，上面的形式定义与形式推导也是可以的.

下面给出两个实质相同的定理. 前一个定理用排列的语言叙述，常用于求排列数问题的母函数方法中；后一个定理用组合的语言叙述，常用于求组合数问题的母函数方法中.

定理 1 有 n 种东西，同种东西不加区别. 假设第 1 种东西只能取出 m_i 个，$i=1, 2, 3, \cdots$；第 2 种东西只能取出 p_j 个，$j=1, 2, 3, \cdots$；$\cdots$；第 n 种东西只能取出 q_k 个，$k=1, 2, 3, \cdots$. 从这 n 种东西中任取 r 个排成一列，排列方法种数 a_r 是函数

$$g(x)=\left(\sum_i \frac{x^{m_i}}{m_i!}\right)\left(\sum_j \frac{x^{p_j}}{p_j!}\right)\cdots\left(\sum_k \frac{x^{q_k}}{q_k!}\right) \tag{19}$$

展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数. 简言之, $g(x)$是数列$\{a_r\}$的指母函数.

证明 函数 $g(x)$的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数为

$$C_r=\sum_{m_i+p_j+\cdots+q_k=r} \frac{r!}{m_i!p_j!\cdots q_k!}, \tag{20}$$

由不全相异元素的全排列公式(参见本书第 8 页)知道,其中

$$\frac{r!}{m_i!p_j!\cdots q_k!} \tag{21}$$

正好是从第 1 种东西中取出 m_i 个, 从第 2 种东西中取出 p_j 个,…,从第 n 种东西中取 q_k 个, 总共 r 个东西排成一列的排列方法种数. 因此 $a_r=C_r$, 即 $g(x)$是数列$\{a_r\}$的指母函数. □

由多组组合公式(参见本书第 8 页)知道, 当 $m_i+p_j+\cdots+q_k=r$ 时, 组合数(21)还有另一含义, 它等于把 r 个不同的元素分为 n 组,使第 1 组有 m_i 个,第 2 组有 p_j 个,…, 第 n 组有 q_k 个元素的分组方法种数. 因此,可将定理 1 改述为

定理 2 把 r 个不同的东西分成 n 组, 但第 1 组只能分到 m_i 个,$i=1, 2, 3, \cdots$; 第 2 组只能分到 p_j 个,$j=1, 2, 3, \cdots$; …; 第 n 组只能分到 q_k 个, $k=1, 2, 3, \cdots$, 其中 $m_i+p_j+\cdots+q_k=r$. 分组方法种数记为 b_r. 则定理 1 中式(19)的函数 $g(x)$是数列$\{b_r\}$的指母函数.

[例 6] r 个编号自 1 至 r 的球分放进 4 个盒里,第 1 盒只能放奇数个,第 2 盒只能放偶数个,第 3、4 盒可放的球数不限. 求放法种数 a_r.

解 由定理 2, 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r, \cdots$的指母函数是

$$f(x)=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2.$$

应用前面的几个公式，把 $f(x)$ 改写成

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\cdot\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})e^{2x}=\frac{1}{4}(e^{4x}-1).$$

因为

$$e^{4x}=1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(4x)^r}{r!}+\cdots,$$

代入上式，从而有

$$f(x)=4^0\frac{x}{1!}+4^1\frac{x^2}{2!}+4^2\frac{x^3}{3!}+\cdots+4^{r-1}\frac{x^r}{r!}+\cdots.$$

因此，当 $r\geqslant 1$ 时，$a_r=4^{r-1}$. □

[例 7] 用 $r+1$ 种数字 1, 2, 3, …, $r+1$ 写成 n 位数，要求每种数字都出现，共可以写出多少个？如果用 $r+1$ 种数字 0, 1, 2, …, r 写 n 位数，要求每种数字都出现，则总共可以写出多少个？设 $n\geqslant r+1$.

解 以 $g(r, n)$ 记符合前一条件的 n 位数的个数，以 $f(r, n)$ 记符合后一条件的 n 位数的个数. 由定理 1，数列 $g(r, 0), g(r, 1), g(r, 2), \cdots, g(r, n), \cdots$ 的指母函数为

$$G(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^{r+1}=(e^x-1)^{r+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i C_{r+1}^i e^{(r+1-i)x}.$$

再把 $e^{(r+1-i)x}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(r+1-i)^j x^j}{j!}$ 代入上式，整理，得 $G(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i C_{r+1}^i (r+1-i)^j\right]\frac{x^j}{j!}$. 从而得到

$$g(r, n)=\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i C_{r+1}^i (r+1-i)^n. \qquad (22)$$

下面求 $f(r, n)$. n 位数的最高一位可从数字 0 以外的 r 个数字中任选一个，有 r 种选法. 选定后，比如选定数字 q 作为最高位，$1\leqslant q\leqslant r$，于是余下的 $n-1$ 位，可用数字 0, 1, 2, …, r 写成，其中数字 q 出现的次数不限(可以不出现)，而另 r 种数字每种至少出现一次. 以 $h(n-1)$ 记这 $n-1$ 位的写法种数，则由定理 1，数列 $\{h(n)\}$ 的指母函数为

$$H(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^r$$
$$=e^x(e^x-1)^r=(e^x-1)^{r+1}+(e^x-1)^r. \qquad (23)$$

$h(n-1)$ 是 $H(x)$ 展开式中 $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 的系数. 由(23)与(22)式，可得

$$\begin{aligned}h(n-1)&=g(r, n-1)+g(r-1, n-1)\\&=\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i C_{r+1}^i(r+1-i)^{n-1}\\&\quad+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k(r-k)^{n-1}\\&=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i C_{r+1}^i(r+1-i)^{n-1}\\&\quad+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}C_r^{i-1}(r+1-i)^{n-1}\\&=(r+1)^{n-1}+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i(C_{r+1}^i-C_r^{i-1})(r+1-i)^{n-1},\end{aligned}$$

注意到 $C_{r+1}^i-C_r^{i-1}=C_r^i$，$(r+1)^{n-1}=(-1)^0C_r^0(r+1-0)^{n-1}$，故上式即为

$$h(n-1)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i C_r^i(r+1-i)^{n-1},$$

从而有

$$f(r,\ n)=rh(n-1)=r\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i}C_r^i(r+1-i)^{n-1}. \qquad \square$$

练 习 十 一

1. 丢掷4颗骰子，求出现的点数之和等于12的丢掷结果的种数.

2. 一只箱子里装着 2^n 张纸片，其中有 C_n^k 张写着号码 k，这里 $k=0, 1, 2, \cdots, n$. 现作有放回的逐一抽取，共取 m 次. 求取出的 m 张纸片的号码之和等于 l 的抽取结果的种数 a_l. 设 $0\leqslant l\leqslant mn$.

3. r 个相同的球分放进 n 个不同的盒子，求分法种数 a_r.

4. 20个相同的球分放进4个不同的盒子，第1、2盒各不超过2个球，第3盒至少有5个球，第4盒球数不限，求放法种数 a.

5. 有7个红球，6个黑球，3个白球，同色球没有区别. 要从这16个球中选12个装进一盒，有多少种选法?

6. 一张一元的人民币兑换成一分、二分、五分及一角的零钱，有多少种兑换方法?

7. 用母函数方法，解练习十的第4题.

8. 用母函数方法，解练习十的第10题.

9. r 个没有区别的球分放进 n 个编号自1至 n 的盒子里，以 $f(r,\ n)$ 记放法种数，求数列 $f(r,\ 0)$, $f(r,\ 1)$, $f(r,\ 2)$, $\cdots$, $f(r,\ n)$, $\cdots$ 的母函数. 记 $f(r,\ 0)=0$.

10. 用数字1, 2, 3, 4写六位数，每种数字出现的次数不超过2次，能写多少个?

11. 用数字1, 2, 3, 4, 5写九位数，其中数字1出现奇数次，数字2出现偶数次，数字3至少出现1次，数字4及5出现的次数不限，能写多少个?

12. 用红、蓝、绿三种颜色在 $1\times n$ 棋盘填色，填红色的及填蓝色的小方格都有偶数个，求填色方法种数 a_n.

13. 用指母函数方法，证明第二节中允许重复的排列公式.

14. 有 $r+1$ 种色球，每种色球至少有 n 个，同色球不加区别. 从这些色球中取 n 个排成一列，其中第1、2种色球可取出的数量不限，而其余 $r-1$ 种色球每种至少取出1个，求排列方法种数 $d(r,\ n)$. 设 $r+1\leqslant n$.

十二、其　　他

上面介绍了一些常用的计数原理和方法，它们只是丰富多采的计数理论的一部分．还有许多非常重要的理论和十分出色的方法，比如，拉姆赛(F. P. Ramsey)理论——如拉姆赛定理，它是抽屉原理的深刻推广；匹配理论——如霍尔(P. Hall)的婚配定理，用它可以判断某些类型的配置是否存在；反演技巧——如墨比乌斯反演公式，容斥原理是它的一个推论；群论方法——如波利亚计数定理，它有主要计数定理之称，等等，限于篇幅，无法一一介绍．

波利亚群论方法在计数理论中有着极其重要的地位．许多复杂的计数问题，利用波利亚理论即可迎刃而解．但是，由于波利亚理论涉及较深的数学知识，这里无法深入介绍．下面通过几个例子，让大家对波利亚方法有个粗略的了解，并期望能引起大家的兴趣．

［例 1］　在皇冠上的四个位置各镶嵌一颗钻石，它们恰分布在一圆周的 4 个等分点上．若只用红宝石或绿宝石，有多少种嵌法？

解　按皇冠上的四个位置有无标号分两种情形讨论．

如果四个位置是带标号的，设依次编为 1, 2, 3, 4 号．因为每个位置有 2 种钻石可供选择，故共有 $2^4=16$ 种嵌法．也可枚举如图 12-1，图中圆圈、圆点分别代表红、绿宝石．

如果四个位置是无标号的，怎样计算嵌法的种数呢？为此，把上面带标号的16种嵌法全体 T 按方法 g 分类：T 中的两

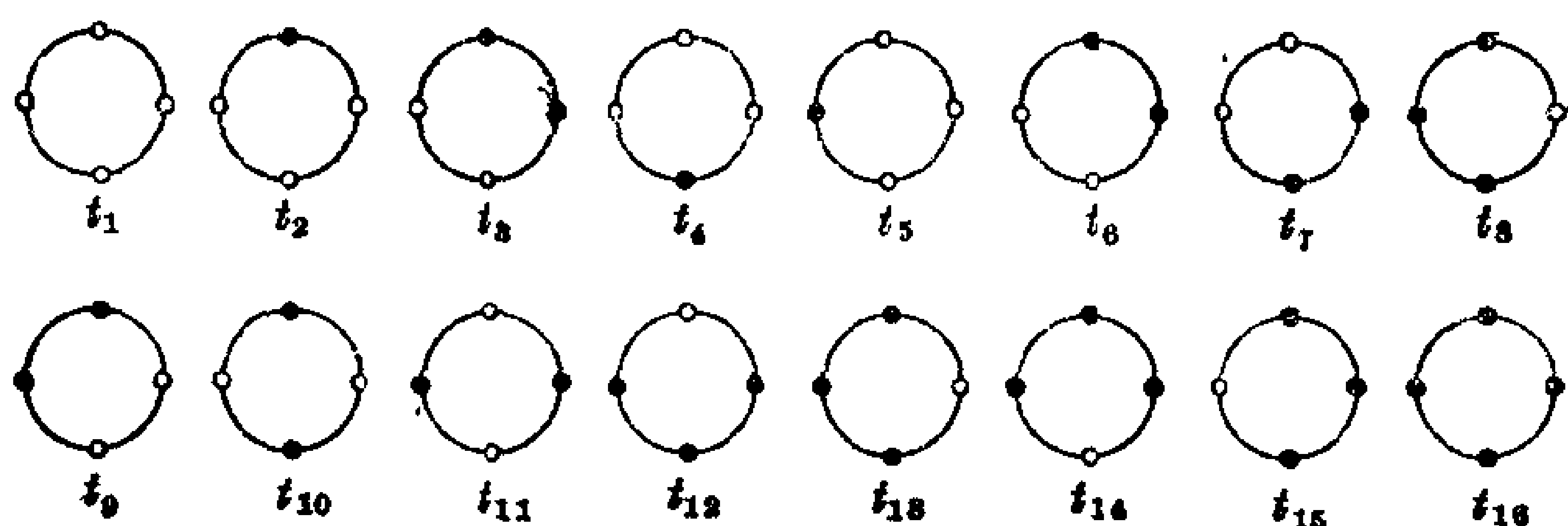


图 12-1

种嵌法如经旋转能够相合则同属一类；否则分属不同的类(为确定起见，下面说的旋转皆指图 12-1 中的各种图形绕圆心沿逆时针方向的旋转)．以每类为元素，作集 $\mathscr{A}$．带标号的同一类中的嵌法恰与无标号的一种嵌法对应，因此，无标号条件下的嵌法种数等于 $|\mathscr{A}|$．T 中的嵌法按 g 分成 6 类：

$$s_1=\{t_1\}, \qquad s_2=\{t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5\},$$
$$s_3=\{t_6,\ t_7,\ t_8,\ t_9\}, \qquad s_4=\{t_{10},\ t_{11}\},$$
$$s_5=\{t_{12},\ t_{13},\ t_{14},\ t_{15}\}, \qquad s_6=\{t_{16}\}.$$

因为，1．同类的嵌法同色宝石的数目必相同，所以 t_1、t_{16} 各自成一类；2．t_2、t_3、t_4、t_5(或 t_6、t_7、t_8、t_9，或 t_{12}、t_{13}、t_{14}、t_{15})分别旋转 0°、90°、180°、270° 后，4 种嵌法相合，故同属一类；3．t_{10}、t_{11} 分别旋转 0°、90°(或 180°、270°)后，2 种嵌法相合，故同属一类．上述 6 类，不同类中的嵌法虽经旋转也无法相合．因此 $\mathscr{A}=\{s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6\}$，$|\mathscr{A}|=6$，即无标号时有 6 种嵌法． □

［例 2］ 在皇冠上的四个位置各镶嵌一颗钻石，它们恰分布在一圆周的 4 个等分点上．若有 m 种颜色的钻石可供选用，有多少种嵌法？

解 如果四个位置是带标号的，则有 m^4 种嵌法，分别记为 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{m^4}$，其全体记为 T．用 π_1、π_2、π_3、π_4 依次记旋

转 0°、90°、180°、270°，并记 $G=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$. 设 $t_j\in T$, $\pi_i\in G$, 用 $\pi_i(t_j)$ 表示嵌法 t_j 经旋转 π_i 后得到的嵌法. 按方法 g 把 T 中的嵌法分类：设 t_j、$t_k\in T$, 如果存在 $\pi\in G$, 使 $\pi(t_j)=t_k$, 则说 t_j 与 t_k 等价，并让它们同属一类；否则说 t_j 与 t_k 不等价，并让它们分属不同类. 于是嵌法全体 T 使用方法 g(或说在 G 下)分成等价类. 等价类全体记为 $\mathscr{A}_m$. 因为 $\mathscr{A}_m$ 中每一类嵌法表示在无标号条件下的一种嵌法，所以嵌法的种数 $a_m=|\mathscr{A}_m|$. 记

$$c_i=|\{t_j;\pi_i(t_j)=t_j\}|,\quad i=1, 2, 3, 4,$$

$$d_j=|\{\pi_i;\pi_i(t_j)=t_j\}|,\quad j=1, 2, \cdots, m^4.$$

c_i 即为 T 中的嵌法在旋转 π_i 下保持不变的嵌法的个数，d_j 即为 G 中的旋转使得 t_j 保持不变的旋转的个数，所以有

$$\sum_{j=1}^{m^4} d_j=\sum_{i=1}^{4} c_i. \tag{1}$$

另一方面，任取一等价类 $s_l=\{t_{k_1}, \cdots, t_{k_r}\}$. 考虑 $\sum_{j=1}^{r} d_{k_j}$, 它表示 $t_{k_1}, \cdots, t_{k_r}$ 分别在 π_1、π_2、π_3、π_4 下保持不变的次数总和. 由于 $t_{k_1}, \cdots, t_{k_r}$ 构成一个等价类，因此 $\sum_{j=1}^{r} d_{k_j}=|G|=4$. 把 $\sum_{j=1}^{m^4} d_j$ 的 m^4 个和项按 t_j 所属的等价类分为 $|\mathscr{A}_m|$ 个组，由上面知道，每组之和数等于 $|G|$, 故有

$$4|\mathscr{A}_m|=\sum_{j=1}^{m^4} d_j. \tag{2}$$

把式(1)代入式(2)，得

$$a_m=|\mathscr{A}_m|=\frac{1}{4}(c_1+c_2+c_3+c_4). \tag{3}$$

下面将进而证明 $c_1=m^4$, $c_2=m^1$, $c_3=m^2$, $c_4=m^1$, 从而有公式

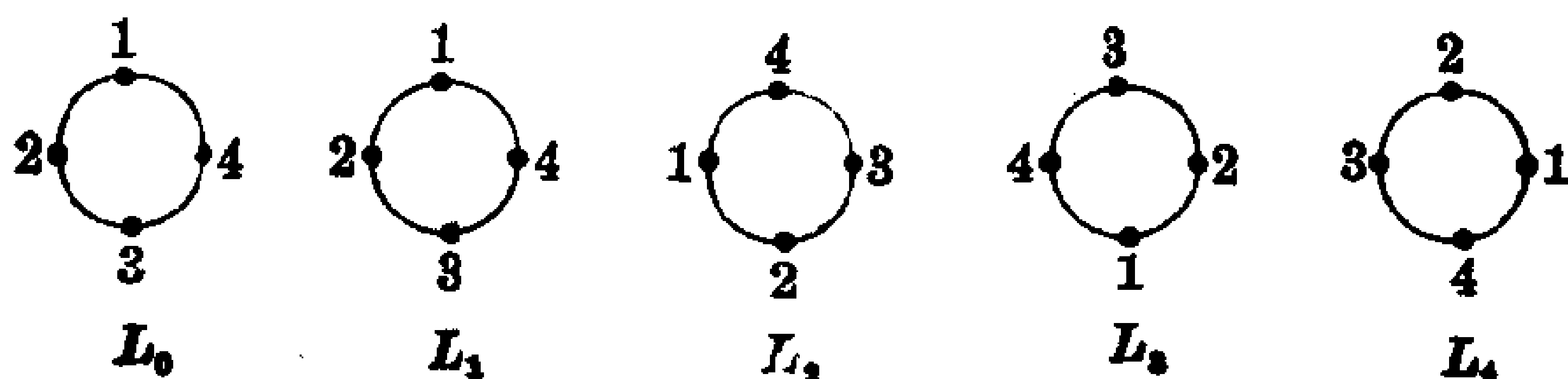


图 12-2

$$a_m=\frac{1}{4}(m^4+m^1+m^2+m^1). \tag{4}$$

记皇冠上四个带标号的位置如图 12-2 中的图 L_0. 图 L_0 经旋转 π_1、π_2、π_3、π_4 依次变为图 L_1、L_2、L_3、L_4. 它们也可看成由 L_0 上的数字 1、2、3、4 通过循环换位得到:

π_1: $L_0\to L_1$. $1\leftrightarrow 1$, $2\leftrightarrow 2$, $3\leftrightarrow 3$, $4\leftrightarrow 4$,

π_2: $L_0\to L_2$. $1\to 4\to 3\to 2\to 1$,

π_3: $L_0\to L_3$. $1\leftrightarrow 3$, $2\leftrightarrow 4$,

π_4: $L_0\to L_4$. $1\to 2\to 3\to 4\to 1$,

其中 $i_1\to i_2\to i_3\to\cdots\to i_{l-1}\to i_l\to i_1$ 表示 L_0 上的 i_1 变为 i_2, i_2 变为 i_3, $\cdots$, i_{l-1} 变为 i_l, 而 i_l 又变为 i_1, 简记为$(i_1i_2i_3\cdots i_l)$, 并称它为长是 l 的一个轮换. $i_1\leftrightarrow i_2$ 即为 $i_1\to i_2\to i_1$. 于是 G 中的旋转可简记为 $\pi_1=(1)(2)(3)(4)$, $\pi_2=(1432)$, $\pi_3=(13)(24)$, $\pi_4=(1234)$, 它们分别称为 π_1、π_2、π_3、π_4 的轮换分解式, π_1 中含 4 个轮换, π_3 中含 2 个轮换, 而 π_2 与 π_4 各含 1 个轮换.

容易看出, 若 $t_j\in T$, 则 $\pi_i(t_j)=t_j$ 的充要条件是嵌法 t_j 满足: 属于 π_i 的轮换分解式中同一轮换的那几个号码(L_0 上)镶嵌同种颜色的钻石. 因此, 若以 $\alpha(\pi_i)$ 记 π_i 所含轮换个数, 则

$$|\{t_j;\ \pi_i(t_j)=t_j\}|=m^{\alpha(\pi_i)},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

即有 $c_i=m^{\alpha(\pi_i)}$, $i=1, 2, 3, 4$. 但因 $\alpha(\pi_1)=4$, $\alpha(\pi_2)=1$, $\alpha(\pi_3)=2$, $\alpha(\pi_4)=1$, 故由(3)式, 即得(4)式. □

[例 3]　在皇冠上的五个位置各镶嵌一颗钻石，它们恰分布在一圆周的 5 个等分点上. 若有 m 种颜色的钻石可供选用，有多少种嵌法？假设五个位置是无标号的.

解　仿例 2，引进 5 种旋转. π_i: 绕圆心沿逆时针方向旋转 $(i-1)\times 72°$, $i=1, 2, 3, 4, 5$. 记 $G=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$, $|G|=5$. 又仿例 2，把五个位置按顺时针方向依次编为 1、2、3、4、5 号. 于是，5 种旋转可用轮换分解式表示：

$$\pi_1=(1)(2)(3)(4)(5),\quad \pi_2=(12345),\quad \pi_3=(13524),$$
$$\pi_4=(14253),\quad \pi_5=(15432).$$

仍以 $\alpha(\pi_i)$ 记 π_i 所含的轮换个数，则有 $\alpha(\pi_1)=5$, $\alpha(\pi_2)=\alpha(\pi_3)=\alpha(\pi_4)=\alpha(\pi_5)=1$. 最后，再仿例 2. 可得嵌法种数

$$a_{5,m}=\frac{1}{|G|}\left[m^{\alpha(\pi_1)}+m^{\alpha(\pi_2)}+m^{\alpha(\pi_3)}+m^{\alpha(\pi_4)}+m^{\alpha(\pi_5)}\right]$$
$$=\frac{1}{5}(m^5+4m).$$ □

在例 1～例 3 中，镶嵌钻石的几个位置在同一平面上，又因是镶嵌在皇冠上，故只考虑在该平面上的旋转. 下面的例 4，镶嵌钻石的几个位置不在同一平面上，因此必须考虑绕各种转轴的旋转. 下例中仍以 $\alpha(\pi)$ 表示 π 所含轮换的个数.

[例 4]　在正立方体的 8 个顶点各镶嵌一颗钻石，有 m 种颜色的钻石可供选用，求嵌法种数.

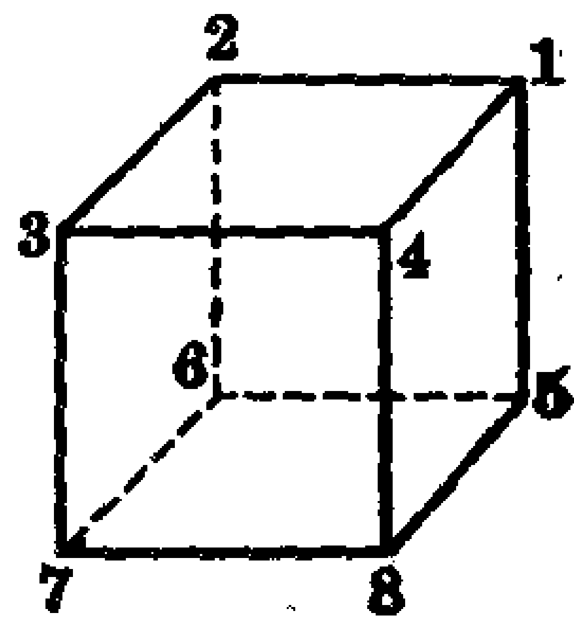


图 12-3

解　如果 8 个顶点是带编号的(如图 12-3)，则有 m^8 种嵌法，其全体记为 T. 如果顶点是无编号的，则下面将证明：嵌法种数

$$a_{8,m}=\frac{1}{24}(m^8+6m^2+3m^4+8m^4+6m^4).\qquad (5)$$

在正立方体的旋转下，T 中的两种嵌法如能相合，则视为同属一类；否则分属不同类. 所谓立方体的旋转是指立方体绕某条轴转动，最后的位置和立方体原来的空间位置相重合. 符合这种要求的旋转可分为下述五种类型(图 12-4)：

I 型. 使立方体不动的旋转 π_1. π_1 的轮换分解式为 $\pi_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，含 8 个轮换，$\alpha(\pi_1)=8$.

II 型. 以立方体两个相对面的中点联线为轴旋转 $\pm 90°$. 这类旋转有 6个，记为 $\pi_2, \pi_3, \cdots, \pi_7$，它们皆含 2 个长为 4 的轮换，比如 $\pi_2=(1234)(5678)$，故 $\alpha(\pi_i)=2$, $i=2, 3, \cdots, 7$.

III 型. 以立方体两个相对面的中点联线为轴旋转 180°. 这类旋转有 3 个，记为 π_8, π_9, π_{10}，它们皆含 4 个长为 2 的轮换，比如 $\pi_8=(13)(24)(57)(68)$，故 $\alpha(\pi_i)=4$, $i=8, 9, 10$.

IV 型. 以立方体的对角线为轴旋转 $\pm 120°$. 这类旋转有 8 个，记为 $\pi_{11}, \pi_{12}\cdots, \pi_{18}$，它们皆含 2 个长为1、2 个长为3的轮换，比如 $\pi_{11}=(1)(7)(254)(368)$，故 $\alpha(\pi_i)=4$, $i=11, 12, \cdots, 18$.

V型. 以立方体的两条对棱的中点联线为轴旋轴 180°. 这类旋转有 6 个，记为 $\pi_{19}, \pi_{20}, \cdots, \pi_{24}$，它们皆含 4 个长为 2 的轮换，比如 $\pi_{19}=(15)(28)(37)(46)$，故 $\alpha(\pi_i)=4$, $i=19, 20, \cdots, 24$.

记 $G=\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{24}\}$. $|G|=24$. 仿本书第111页例 2

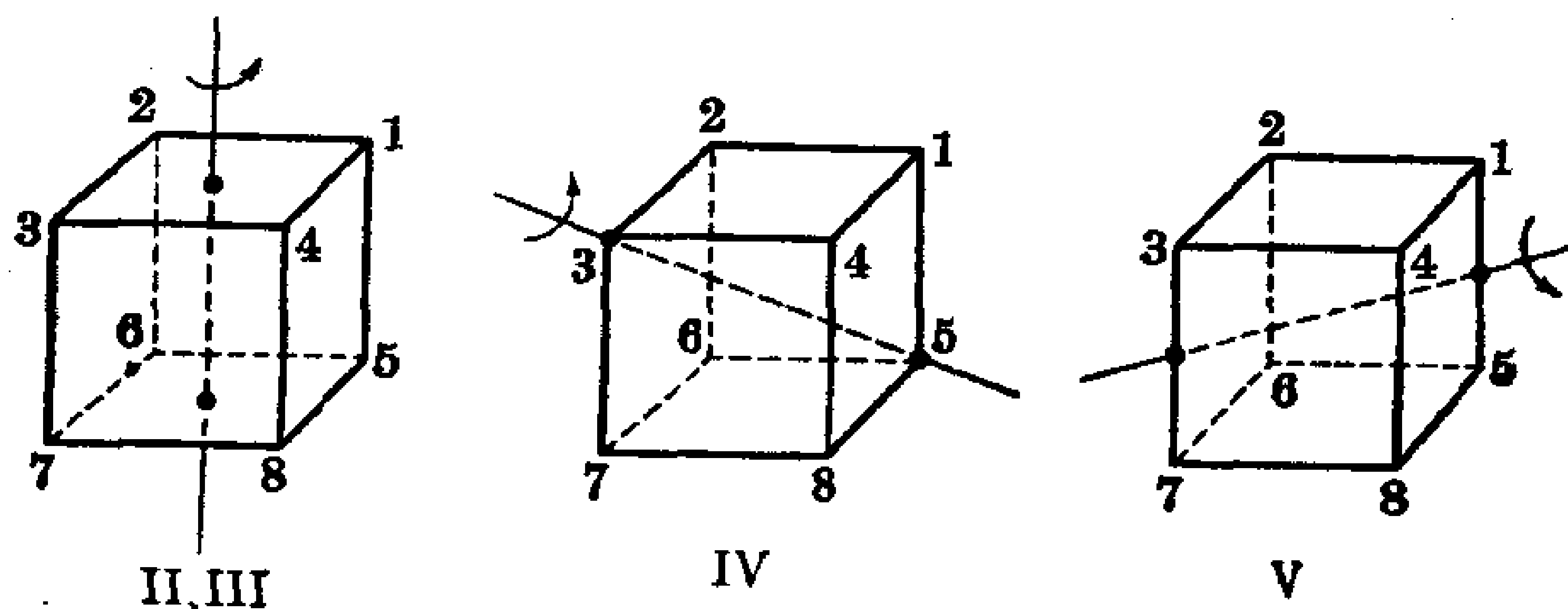


图 12-4

的证明，可得

$$a_{8,m}=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}m^{\alpha(\pi)},$$

也即有

$$\begin{aligned}a_{8,m}&=\frac{1}{24}[m^{\alpha(\pi_1)}+m^{\alpha(\pi_2)}+\cdots+m^{\alpha(\pi_{24})}]\\&=\frac{1}{24}(m^8+6m^2+3m^4+8m^4+6m^4).\end{aligned}$$ □

通观上述各例的解法，关键在于两点．1．确定集合 G．G 中的元素是某些旋转，这种旋转 π 符合条件 P：所考察的 n 个点（即空间的 n 个位置）经旋转 π 后仍与这 n 个点原来所占据的空间位置重合．2．计算 $\alpha(\pi)$．把 n 个点自 1 至 n 编号，于是 G 中的旋转 π 可用数 1，2，…，n 的轮换分解式表示，$\alpha(\pi)$ 即等于 π 所含的轮换个数．注意到上面两点，仿照前几例的证明，不难给出下面的

命题 空间中有 n 个无标号的点，每个点用一种颜色染色，如果有 m 种颜色可供选用，则染色方法的种数

$$a_{n,m}=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}m^{\alpha(\pi)}. \tag{6}$$

其中 G 是符合条件 P 的旋转组成的集合，$\alpha(\pi)$ 等于 G 中的旋转 π 所含轮换的个数．

公式(6)是著名的波利亚计数定理的一个简单特例．由于一般的波利亚定理要用到群论的语言来叙述，这里只好割爱．

波利亚计数定理是计数的群论方法中的主要定理，它在化学、遗传学等涉及分子结构的学科中有着重要的应用．事实上，波利亚正是为了计数聚合物才证明他那著名的定理的．另外，波利亚定理在图论、编码理论以及计算机科学等也有广泛的应用．

练习题解答概要

练 习 一

1. 36, 3. **2**. 18. **3**. 不考虑旋转，则有16种；若经旋转可以相合的填色法不加区别，则有6种. **4**. 当 $n=2k$ 时有 $k(k+1)$ 个，当 $n=2k+1$ 时有 $(k+1)^2$ 个. **5**. 因 $\left[\frac{1000}{7}\right]=142$, $n^2(\mathrm{mod}7)$ 只取4、2、1、0, 故所求为 142^2. **6**. 因四位数 $a_1a_2a_3a_4$ 被11整除的充要条件是 $(a_1+a_3)-(a_2+a_4)$ 被11整除. **7**. 10, 21. **8**. 12. **9**. 10^5, $4\cdot10^5$. **10**. 11. **11**. $(1+2+3+4+5+6+7+8)\times17\div3=204$. **12**. 175. **13**. 等于 xoy 平面上三角形区域 $x+y\leqslant n-1$, $x\geqslant1$, $y\geqslant1$ 中格点的个数，有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. **14**. 14.

练 习 二

3. C_{36}^{18}. **4**. 2^{18}. **5**. 因 $30030=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$, 故有 2^6 及 2^5 个. **6**. 因八位数 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ 被11整除的充要条件是 $(a_1+a_3+a_5+a_7)-(a_2+a_4+a_6+a_8)$ 被11整除，故重排后至少可得到 $2(4!)^2-1$ 个被11整除的八位数. **7**. $n_1n_2+n_1n_3+n_2n_3$. **8**. $(48!)P_{49}^4$. **9**. 每种东西被挑上或没被挑上，有2种可能，因有 n 件东西，故能组成 2^n 个集合. **10**. 67×66, 67^2. **11**. $(2n)!/2^nn!$. **12**. 每种三角形剖分都可如下得到：选十边形的一个顶点(10种选择)，以它的两个邻点联对角线 l_1 作成一个三角形；从 l_1 的某端(2种选择)引对角线 l_2 又作成以 l_1、l_2 为两边的三角形；从 l_2 的某端(2种选择)引对角线 l_3 又作成以 l_2、l_3 为两边的三角形；如此作下去，最后，从对角线 l_6 的某端(2种选择)引对角线 l_7 作成两个三角形. 故有 $10\cdot2^6$ 种作法. 但每种剖分可由2种作法得到，故有 $10\cdot2^5$ 种剖分. 对凸 n 边形，有 $n\cdot2^{n-5}$ 种剖分.

练 习 三

1. 圆周上4点与圆内1交点配对，故有 C_n^4 个交点. **2**. 方法同上题，有

$C_{n_1}^2C_{n_2}^2$ 个交点． **3**．$10^6=2^65^6$，把数字2、5分别看黑、白球，用例4，可得答数为 $(C_{6+2-1}^6)^2=7^2$ 及 $(C_{6+3-1}^6)^2=28^2$． **4**．仿例3，有 C_{m-rn+r}^n 种． **5**．把乘积式 $((a_1a_2)a_3)(a_4a_5)$ 写成 $a_2|a_3|a_4a_5||$，乘积式 $(a_1((a_2a_3)a_4))a_5$ 写成 $a_2a_3|a_4||a_5|$，等等，并把 a_2、a_3、a_4、a_5 当作白球，4条竖线|当作黑球，每种排列看作取球顺序． **6**．以 B 记 $n+1$ 个黑球 $n-1$ 个白球的逐一取球方式全体，对于 A(或 B)中任一取球方式，必在某第 $2k+1$ 次取球后，取出的黑球数第一次超过取出的白球数，于是，把第 $2k+2$ 次后取出的黑球改为白球，而白球则改为黑球，则得 B(相应地 A)中的一种取球方式，故 $|A|=|B|=C_{2n}^{n+1}$． **7**．与例4之i的分配模型配对，可得 C_{r+n-1}^r． **8**．由题7，有 C_{n+2}^2(或 C_{n-1}^2)． **9**．方法同题7．有 C_{n+m-1}^m 种装法． **10**．$m-n$ 个黑点排成一行，每两个黑点之间及首尾两端各留出一个空位，从这 $m-n+1$ 个空位选 n 个空位各写上一个圆圈，有 C_{m-n+1}^n 种选法．这 $m-n$ 个黑点与 n 个圆圈自左到右填上1, 2, 3, …, n．圆圈上的号码即为取出的号码，没有邻号．因此有 C_{m-n+1}^n 种选法．

练　习　四

1．$C_{n-1}^kC_{m-1}^{k-1}+2C_{n-1}^{k-1}C_{m-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k-2}C_{m-1}^{k-1}=C_{m-1}^{k-1}C_{n+1}^k$． **2**．$3(10^3+10^2\cdot9+10\cdot9^2+9^3+9^3)=12504$． **3**．$1+10+85+660+4860+34560=40176$． **4**．$10^6=2^65^6$，按三个因子都是2的倍数、恰有两个因子是2的倍数、只有一个因子是2的倍数分组，可求得乘积式的种数是 $C_6^2C_8^2+C_3^1C_5^1C_7^2+C_3^2C_6^2=640$． **5**．$C_3^1C_{11}^1C_{10}^1+(3!)C_{11}^1C_{10}^3+C_3^1C_{11}^1C_{10}^5+C_3^1C_{11}^3C_8^3$． **6**．$C_{2n+3}^2-3C_{n+2}^2=C_{n+1}^2$． **7**．$2+C_3^1C_4^3+3C_4^2+4=36$． **8**．$C_{r-1}^{r-n}+C_n^1C_{r-1}^{r-n+1}+C_n^2C_{r-1}^{r-n+2}+C_n^3C_{r-1}^{r-n+3}$． **9**．$(C_n^kP_m^k-C_{n-1}^{k-1}P_{m-1}^{k-1})-(C_{n-1}^{k-1}P_{m-1}^{k-1}-C_{n-2}^{k-2}P_{m-2}^{k-2})$． **10**．引用本书第15页例3，有 $C_{2n-r-1}^{r-1}+C_{2n-r}^r=\frac{2n}{2n-r}C_{2n-r}^r$ 种． **11**．先证 $|A_5|\geqslant1=\frac{1}{5-4}C_5^5$．当 $n\geqslant6$ 时，每5点为一组，共有 C_n^5 个5点组，每组有1个凸四边形．但每个凸四边形至多被重复计算 $n-4$ 次．故有 $|A_n|\geqslant\frac{1}{n-4}C_n^5$． **12**．按排头的小孩岁数为1, 2, 3, …, n 分组，得 $a_n=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$． **13**．引用练习三第6题，$|D|=C_{2n}^n-C_{2n}^{n+1}$． **14**．按红球的个数分为 $n+1$ 组，得 $a=C_{2n}^n+C_{2n}^{n-1}+\cdots+C_{2n}^1+C_{2n}^0=\frac{1}{2}C_{2n}^n+2^{2n-1}$． **15**．引用练习三第8题，在平面 $x+y+z=6n$ 上适合 $x\geqslant1$、$y\geqslant1$、$z\geqslant1$ 的格点有 $(6n-1)(3n-1)$ 个．其中 $x=y=z$ 的格点有1个，恰有2个坐标数相等的格点有 $3(3n-2)$ 个，3个坐标数两两不相等的格点有 $6(3n^2-3n+1)$ 个．故有 $1+(3n-2)+(3n^2-3n+1)=3n^2$ 种．

练 习 五

1．以 B_i 记 i 号纸片没有抽到，用筛公式得 $\sum_{i=0}^{m}(-1)^iC_m^i(n-i)^r$．若是不放回抽样，则为 $\sum_{i=0}^{m}(-1)^iC_m^iP_{n-i}^r$． **2**．用筛公式得 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^kP_{m(n-k)}^r$． **3**．$\pi(224)-\pi(120)=18$． **4**．以 B_2、B_3、B_5 依次记被 2、3、5 整除且不超过 2000 的整数全体，$|(B_2\cap B_3)\cup(B_2\cap B_5)\cup(B_3\cap B_5)|=534$，$|B_2\cup B_3\cup B_5|-534=932$． **5**．用筛公式得 $\sum_{i=0}^{8}(-1)^iC_9^i(9-i)^n$． **6**．$\frac{n!}{r!}\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\frac{1}{(k-r)!}$． **7**．因 $\sqrt{1000000}=1000$，$\sqrt[3]{1000000}=100$，$\sqrt[6]{1000000}=10$，所以欲求的整数有 $10^6-10^3-10^2+10=998910$ 个． **8**．以 A_k 记 n 以内的 p_k 的倍数全体，$|A_k|=\frac{n}{p_k}$，$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}$，$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{n}{p_ip_jp_k}$，…．再用筛公式． **9**．以 A_1、A_2、A_3 依次记连续出现 4 个黑球、连续出现 3 个白球、连续出现 2 个红球的排法全体．用筛公式，得 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=\frac{9!}{4!3!2!}-\frac{6!}{3!2!}-\frac{7!}{4!2!}-\frac{8!}{4!3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{4!}-3!$． **10**．女人坐单号或双号座位有 2 种选择．n 个女人坐在双号座位，有 $n!$ 种坐法．女人坐定后，以 a_k 表示坐在 $2k$ 号位的女人的丈夫，而 A_k 表示 a_k 坐在妻子的邻位的坐法全体，$k=1, 2, \cdots, n$．用筛公式及练习四第 10 题的结果，可算得 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=2\cdot n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{2n}{2n-r}C_{2n-r}^r(n-r)!$．

练 习 六

1．仿本书第42页例 2，有 $\frac{(2n)!}{n+1}$ 种． **2**．$(n!)^2(C_{2n}^n-C_{2n}^{n+4})$，即等于以 $(0,4)$、$(2n,4)$ 为端点且与 x 轴不交的折线条数的 $(n!)^2$ 倍． **3**．以 D 记以 $(1,-1)$、$(2n-1, -1)$ 为端点且与 x 轴不相交的折线全体，则 $|A|=|D|$，从而 $|D|=C_{2n-2}^{n-1}-C_{2n-2}^{n-2}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$． **4**．等于从 $(0, 0)$ 出发在 $x=m+2n$ 首次到达 $y=m$ 的折线条数．由对偶原理，$|A|=C_{m+2n-1}^{m+n-1}-C_{m+2n-1}^{m+n}=\frac{m}{m+n}C_{m+2n-1}^n$． **5**．$C_{20}^9-C_{20}^{14}$，即等于以 $(0, 5)$、$(20, 3)$ 为端点且与 x 轴不相交的折线条数． **6**．$C_{20}^9-C_{20}^{15}$，即等于以 $(0, 6)$、$(20, 4)$ 为端点且与 x 轴不相交的折线条数． **7**．把由 $(0, 1)$ 出发且在 $x=27$ 首次到达 $y=10$ 的折线全体 E 按与 x 轴不相交、相交分为 A 组、F 组．$a=|A|=|E|-|F|$．由对偶原理，$|E|=C_{26}^{17}-C_{26}^{18}=C_{26}^{18}$．

由(0, −1)出发且在 $x=27$ 首次到达 $y=10$ 的折线全体记为 G. 因 G 中的折线与 $y=-10$ 不相交，仿反射原理的证明，可得 $|F|=|G|$，而 $|G|=C_{26}^{18}-C_{26}^{19}=\frac{11}{19}C_{26}^{8}$. 于是 $a=C_{26}^{8}-\frac{11}{19}C_{26}^{8}=C_{26}^{7}$. **8**. 按乒乓球比赛规则，打完第 36 球时比分应是 20:16. 因此 f 等于以(1, 1)、(36, 4)为端点且与 x 轴不相交的折线条数，即有 $f=\frac{1}{9}C_{35}^{16}$. **9**. 以 A 记符合题设的折线全体，以 B 记由(0, 0)出发且在 $x=2n-m$ 首次到达 $y=-m$ 的折线全体. 设 $l\in A$，把 l 介于 x 轴与直线 $y=1$ 之间的 m 节斜率为 1 的线段截掉，余下的向左靠拢，接成 B 中的一条折线 l'. 反之，若 $l'\in B$，则把 l' 于首次到达 $y=-1, -2, \cdots, -(m-1)$ 处断开，各补上斜率为 1 的一节，在(0, 0)处也补上斜率为 1 的一节，得到 A 中的一条折线 l. 因此有 $|A|=|B|=\frac{m}{2n-m}C_{2n-m}^{n}$. **10**. 参看图 6-7，证法同例 5.

练 习 七

1. 不妨设这 52 个数取自 1 至 100 之间且互不相同. 把 1 至 100 这 100 个数分为 51 类：50、100 各一类，其余 49 类每类由满足 $i+j=100$ 的两个数组成. 52 个数必有 2 个同属一类. **2**. 把 $n+1$ 个数表为 $a_k=2^{m_k}(2j_k+1)$, $k=1, 2, \cdots, n+1$. 整数 m_k、$j_k\geqslant 0$. 因 $n+1$ 个奇数 $2j_k+1(1\leqslant k\leqslant n+1)$ 只能取值 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$，故一定有 2 个相同，设 $2j_k+1=2j_i+1$，则 a_k 与 a_i 中有一个能整除另一个. **3**. 因运动员有 n 人，而积分只能有 $0, 1, 2, \cdots, n-2$ 等 $n-1$ 种. **4**. 反复应用抽屉原理：有某国 A 至少有 330 个成员，编号为 $a_1<a_2<\cdots<a_{330}$. 作 329 个差数 $b_k=a_k-a_1$, $k=2, 3, \cdots, 330$. 若有某 b_k 号是 A 国成员，则已得证；否则有某国 B 至少有 $b_2, b_3, \cdots, b_{330}$ 号中的 66 人. 如此继续下去，即可得证. **5**. 联结三边中点，把原三角形分为 4 个小正三角形. **6**. 把单位圆分成 5 个全等的扇形. **7**. 仅就 $m=19$ 证明. 以 a_n 记第 n 天的服药量. 令 $b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $c_n=19+b_n$ (其中 $n=1, 2, \cdots, 60$). 这 120 个整数介于 1 与 119 之间，必有两数相等，设 $b_j=c_{i-1}$，则 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j=19$. **8**. 把区间[0, 1)作 1000 等分. 考虑 1001 个实数 $k\sqrt{2}-[k\sqrt{2}]$, $k=1, 2, \cdots, 1001$，它们都在[0, 1)上，故必有某两个(设为 $i\sqrt{2}-[i\sqrt{2}]$ 及 $j\sqrt{2}-[j\sqrt{2}]$)落在同一等分区间. 取 $l=|[i\sqrt{2}]-[j\sqrt{2}]|$, $m=|i-j|$，则有 $|l-m\sqrt{2}|=|(i\sqrt{2}-[i\sqrt{2}])-(j\sqrt{2}-[j\sqrt{2}])|<10^{-3}$. 这表明质点跳了 m 步，就掉进第 l 个陷阱里. **9**. 引用例 4 的结果，并仿例 4 的证法. **10**. 若有一点 a 与另 4 点都联蓝线，则这 4 点构成红棱四面体. 若任一点 a 至少与另 5 点联的

都是红线，则因 $5\times9\div2$ 不是整数，故有某点 b_0 与另 6 点 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6 联的都是红线. 点 b_1 与 b_2、b_3、b_4、b_5、b_6 的联线有 3 条同色，不论是蓝色或红色，a、b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6 中有 4 点构成红棱四面体. **11**. 半径为 5 的球面面积是 100π，半径为 5 高为 1 的球冠面积是 10π. 以给定点为中心在球面上作高为 1 的球冠，这 101 个球冠面积总和是 1010π. 而 $1010\pi>10\times100\pi$. 再用重迭原理. **12**. 5 个全等的凸五边形都落在一个与 S_1 相似但边长为 S_1 的 2 倍的凸五边形 S 中，而 S 的面积等于 S_1 的 4 倍. 再用重迭原理. **13**. 证法类似上题，也用重迭原理. **14**. 在直线上建立坐标系，设有限个点集为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. A_i 中的最小数、最大数分别记为 a_i、b_i，$i=1, 2, \cdots, n$. 令 $a=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$b=\min\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，并不妨设 a 是 A_j 的最小数，b 是 A_k 的最大数. 由题设，有 $a\leqslant b$. 如果 $a=b$，则点 a 属于每一个 A_i. 如果 $a<b$，则每个 A_i 必含有点 a 或点 b，否则有 $A_i\cap A_j\cap A_k=\varnothing$，与题设矛盾. 由抽屉原理，点 a 或点 b 属于 $\{A_i\}$ 中至少半数的点集. **15**. 设给定的开区间为 A，对固定的 q，$1\leqslant q\leqslant n$，落在 A 中的以 q 为分母的既约分数至多一个，否则，与 A 是长为 $\frac{1}{n}$ 的开区间矛盾. 记 $m=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$. 用反证法，设有 m 个两两不等的既约分数 $\frac{p_i}{q_i}(i=1, 2, \cdots, m)$ 落在 A 中，$1\leqslant q_1<q_2<\cdots<q_m\leqslant n$，仿第 2 题，用抽屉原理，$q_1, q_2, \cdots, q_m$ 这 m 个数中，必有一个是另一个的倍数，设 $q_j=rq_i$，r 为正整数，则 $\left|\frac{p_j}{q_j}-\frac{p_i}{q_i}\right|\geqslant\frac{1}{q_j}\geqslant\frac{1}{n}$，与 A 是长为 $\frac{1}{n}$ 的开区间矛盾.

练 习 八

1. 平面上任意二个格点与 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 必不等距，从而平面上的格点可按与 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离由小到大排列. **2**. 证法可仿例 2. **3**. 设 a、b 是 $2n+3$ 个给定点的外壳凸多边形的两个相邻顶点，则其余 $2n+1$ 个点 $c_1, c_2, \cdots, c_{2n+1}$ 必在直线 ab 的同侧. 作 $\alpha_i=\angle ac_ib$，$i=1, 2, \cdots, 2n+1$. 这 $2n+1$ 个角两两不等，可由小到大排列，排在第 $n+1$ 位的设是 $\angle acb$，则过 a、b、c 的圆符合要求. **4**. 设 a_1 是认识男生最多的女生. 设 a_1 不认识男生 b_1，而 b_1 认识女生 a_2. 因 a_2 认识的男生不比 a_1 认识的男生多，所以必有另一男生 b_2，a_1 与 b_2 认识但 a_2 与 b_2 不认识. 女生 a_1、a_2 与男生 b_1、b_2 符合要求. **5**. 作直线 L，使 22 点 $a_k(k=1, 2, \cdots, 22)$ 在 L 同侧且任两点至 L 距离不相等. 令 $\rho_k=\rho(a_k, L)$，可从小到大排序，不妨设 $\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_{22}$. 从点 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5，可选出 4 点为顶点作凸四边形，其两组对顶点分别结对，联线相交. 再考虑余下的某点

$a_i(1\leqslant i\leqslant 5)$及点 a_6, a_7, a_8, a_9, 并按上法结对. 如此一直作下去即可. **6**. 存在性显然. 仅证唯一性, 设按分组法β分成的小组最多, 这些小组全体记为E, E中各小组的人数可从小到大排序, 设为$i<j<\cdots<k$. 设有m个k人小组, 把E中任一k人小组重新分组, 其中任意$k-1$人为一组, 则重新分成k个$k-1$人小组. 但是, 同一个新的$k-1$人小组至多可由$11-k$个不同的k人小组产生, 因此, 新的$k-1$人小组的组数不小于$\frac{km}{11-k}$. 因按分组法β分成的组数最多, 由此有$k\leqslant 5$. 对E中任一i人小组添加一人组成新的$i+1$人小组, 并仿上面, 可以证明$i\geqslant 5$. 因此, 符合要求的分组方法只有一种: 把10人分成C_{10}^5个5人小组. **7**. 有限个圆中必有半径最大的圆O_1. 留下圆O_1, 除去与圆O_1相交的圆. 其余的圆中必有半径最大的圆O_2. 留下圆O_2, 除去与圆O_2相交的圆. 按此法继续选留的那几个圆O_1、O_2、O_3、$\cdots$、O_m即符合要求. **8**. 满足$\frac{1}{r}\leqslant\frac{m}{n}$的无穷多个自然数$r$中必有最小的$n_1$. 如$\frac{1}{n_1}=\frac{m}{n}$, 则已证. 否则, 令$m_1=mn_1-n$. 满足$\frac{1}{r}\leqslant\frac{m_1}{nn_1}$的无穷多个自然数$r$中必有最小的$n_2$. 如$\frac{1}{n_2}=\frac{m}{nn_1}$, 则已证. 否则, 令$m_2=mn_2-nn_1$, 如此继续下去, 因$m>m_1>m_2>\cdots$, 故必有$k$, 使$m_k=0$. **9**. 与例4的证法相仿. **10**. 若(x, y, z)是整数解, 则x、y、z必皆为偶数. 整数解全体的x组成非空集X, 有最小数x_0. 设(x_0, y_0, z_0)是整数解, 并令$x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, $z_0=2z_1$, 则(x_1, y_1, z_1)是解, 矛盾.

练 习 九

1. $a_{n+1}=a_n+n$, $b_{n+1}=b_n+n+1$, $a_2=1$, $b_2=4$, 再用取和法. **2**. 因$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, $f_1=2$, $f_2=3$, 迭代, 得$f_{10}=144$. **3**. 按张三属二人小组与否分类, 可得$g(n, k)=(n-1)g(n-2, k-1)+kg(n-1, k)$. 为求$g(n, 2)$, 可用归纳法. **4**. $n-1$个数可写$f(n-1)$个乘积式, 设式σ是其中一个, 第n个数a可添在σ的两端, 即$a\cdot\sigma$与$\sigma\cdot a$, 有2种; 也可添进式σ的中间, 设$\alpha\cdot\beta$是式σ中的一个乘积运算, a可如下添入: $(a\cdot\alpha)\cdot\beta$, $(\alpha, a)\cdot\beta$, $\alpha\cdot(a\cdot\beta)$, $\alpha\cdot(\beta\cdot a)$, 故有$4(n-2)$种添进式$\sigma$中间的方法. 于是有$f(n)=2(2n-3)f(n-1)$. **5**. 按$n$排在第1、2、3、$\cdots$、$n$位分组. **6**. 有递推式$f(r, n)=(n+r-1)f(r-1, n)$, 而$f(1, n)=n$, 再用取积法, 得$f(r, n)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1)$. **7**. 按押后的那人是否被选上分成两组. **8**. 对$n+m+k-1$男$m+k-1$女恰有$k-1$对夫妻的一种符合题设的排列, 现再插进一对夫妻且仍符合题设: 可插进男女相邻但非夫妻之间的任一处, 有$2m+k-1$种插法; 可插进二男之间的任

一处，有 $2(n-1)$ 种插法；这对夫妻可排首尾两端，有 2 种排法，因此 $f(n, m, k)=(2n+2m+k-1)f(n, m, k-1)$. 最后再用归纳法. **9**. 有 $f(1, j)=f(i, 1)=1$, $f(i, j)=f(i-1, j)+f(i, j-1)$. **10**. 按第一行是否放车分为两组. **11**. 按第一列是否放车分组，得 $f(n, k)=f(n-1, k)+(n-k+1)f(n-1, k-1)$. 再迭代，并注意有 $f(n,1)=C_{n+1}^2$, $f(n,n)=1$, 从而 $f(6,4)=301$. **12**. B_n^k 中的排列可用两种方法得到：对 B_{n-1}^{k-1} 中的排列，添上 n，排在最后；或者，对 B_{n-1}^k 中的排列，添上 n，有 $n-1$ 种添入方法使新排列属于 B_n^k. **13**. 对 B_{m-1}^n 中的排列，再插入 n 张 m 号纸片且有某张 m 号纸片排头，新排列属于 B_m^n. 因有 C_{mn-1}^{n-1} 种插入方法，故 $f(m, n)=C_{mn-1}^{n-1}f(m-1, n)$. 最后用取积法，并注意 $f(1, n)=1$. **14**. 取出 r 号球，或者恰好仍有 m 个空盒，或者恰好有 $m+1$ 个空盒. **15**. 由第 36 页例 5 易知 $g(r, n, m)=\sum\limits_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_n^m C_{n-m}^k(n-m-k)^r$. 用倒推归纳法. $f(r, n, n)=0$. 注意 $C_n^m C_{n-m}^k\dfrac{m}{m+k}=C_n^{m+k}C_{m+k-1}^{m-1}$, 有

$$\begin{aligned}f(r, n, m)&=f(r, n, m+1)+g(r, n, m)\\&=\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k[C_n^m C_{n-m}^k-C_n^{m+k}C_{m+k-1}^m](n-m-k)^r\\&=\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_n^{m+k}C_{m+k-1}^{m-1}(n-m-k)^r.\end{aligned}$$

16. 分组，A_k: 第 n 盒恰有 k 个球，$k=1, 2, \cdots, r-n+1$.

练 习 十

1. 递推方程 $F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0$, $F_1=1$, $F_2=2$. **2**. 递推方程 $b_{n+2}-2b_{n+1}-2b_n=0$, $b_1=3$, $b_2=8$. **3**. 以 a_n、b_n、c_n、d_n 依次记质点经 n 步转移后到达点 a、b、c、d 的转移方式种数，有 $e_n=2d_{n-1}$, $a_n=2b_{n-1}$, $b_n=a_{n-1}+c_{n-1}$, $c_n=b_{n-1}+d_{n-1}$, $d_n=c_{n-1}$, 从而有递推方程 $e_{2(m+2)}-4e_{2(m+1)}-2e_{2m}=0$, 而 $e_2=0$, $e_4=2$. **4**. 按 1 号及 3 号扇形同色或不同色分为二组，得 $a_n=(k-1)a_{n-2}+(k-2)a_{n-1}$, 而 $a_1=k$, $a_2=P_k^2$, 再直接解递推方程. 或用降阶法，令 $b_n=a_{n+1}-(k-1)a_n$, 则有 $b_{n+1}+b_n=0$, 然后求解. **5**. 有 $a_n+a_{n-1}=(m-1)^{n-1}$, 或 $a_n-(m-2)a_{n-1}-(m-1)a_{n-2}=0$. **6**. $f(n+2)-2f(n+1)-8f(n)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=4$, 从而 $f(n)=(-1)^n\dfrac{1}{3}2^n+\dfrac{1}{6}4^n$. **7**. 有 $f(2k+1)=f(2k)+3k^2+7k+4$, $f(2k+2)=f(2k+1)+$[redacted]$k+8$, 从而有递推方程 $f(2(k+1))=f(2k)+6k^2+17k+12$. **8**. [redacted]形，则有递推方程 $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2$. **9**. 有 $f(2m+1$[redacted]$-1)$, $f(2m)=f(2m-1)+(m-1)^2$,

从而有递推方程 $f(2(m+1)-1)-f(2m-1)=(m-1)(2m-1)$． **10**．按前 $n-1$ 位有偶数个 1 或奇数个 1 分组，有 $a_n=3a_{n-1}+(4^{n-1}-a_{n-1})$，$a_1=3$．解出 $a_n=\frac{1}{2}(4^n+2^n)$． **11**．把没有一个相合的配牌方法分为两组．有某个 $k\leqslant n-1$，乙牌的 n 号与甲牌的 k 号配对且乙牌的 k 号与甲牌的 n 号配对；其余配牌法为一组．于是 $f(n)=(n-1)f(n-2)+(n-1)f(n-1)$．作变换 $a_n=f(n)/n!$，从而有 $a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})$．再用取积法，得 $a_n-a_{n-1}=(-1)^n\frac{1}{n!}$，然后求解．

练 习 十 一

1．母函数 $g(x)=x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4}=x^4(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})(1+C_4^1x+C_5^2x^2+C_6^3x^3+\cdots)$，$a_{12}=C_{11}^8-4C_5^2$． **2**．母函数 $g(x)=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)^m=(1+x)^{nm}$． **3**．母函数 $g(x)=(1-x)^{-n}$． **4**．母函数 $g(x)=x^5(1+x+x^2)^2(1-x)^{-2}$，$a=16+2\times15+3\times14+2\times13+12=126$． **5**．母函数 $g(x)=(1-x^8)(1-x^7)(1-x^4)(1-x)^{-3}$，$C_{14}^{12}-C_{10}^8-C_7^5-C_6^4+C_3^1+C_2^0$． **6**．母函数 $g(x)=\left[\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)(x^{2i}+x^{2i+1})\right]\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)(x^{10k}+x^{10k+5})\right]$，其展开式 x^{100} 的系数等于 2156． **7**．设母函数 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$．由 $a_n=(k-2)a_{n-1}+(k-1)a_{n-2}$，可得 $[1-(k-2)x-(k-1)x^2]g(x)=kx(1+x)$，故 $g(x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(k-1)^n-(-1)^n]x^n$． **8**．令 $a_0=1$．由 $a_n=2a_{n-1}+4^{n-1}$ 知母函数 $g(x)$ 满足 $g(x)-1=2xg(x)+x(1-4x)^{-1}$，解出 $g(x)$，展开得 $a_n=\frac{1}{2}(4^n+2^n)$． **9**．设母函数 $G_r(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(r,n)x^n$，因 $f(r,n)=f(r,n-1)+f(r-1,n)$，$f(0,n)=1$，$f(r,0)=0$，从而 $G_r(x)=xG_r(x)+G_{r-1}(x)$，即 $G_r(x)=\frac{1}{1-x}G_{r-1}(x)$，而 $G_0(x)=\frac{x}{1-x}$，故得母函数 $G_r(x)=x(1-x)^{-(r+1)}$． **10**．指母函数 $g(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^4$，$\frac{x^6}{6!}$ 的系数为 $2\cdot6!$． **11**．指母函数 $g(x)=\frac{1}{4}(e^{5x}-e^{4x}-e^x+1)$，其展开式 $\frac{x^9}{9!}$ 的系数为 $\frac{1}{4}(5^9-4^9-1)=422745$． **12**．指母函数 $g(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^x$，故 $a_n=\frac{1}{4}[(-1)^n+2+3^n]$． **13**．指母函数 $g(x)=(e^x)^n=e^{nx}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$． **14**．数列 $d(r,0)$，$d(r,1)$，$d(r,2)$，$\cdots$ 的指母函数 $D(x)=e^{2x}(e^x-1)^{r-1}=(e^x-1)^{r+1}+2(e^x-1)^r+(e^x-1)^{r-1}$，利用例 7，有 $d(r,n)=g(r,n)+2g(r-1,n)+g(r-2,n)$．

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝计数
作者＝黄国勋，李炯生编著
页数＝１２３
ＳＳ号＝１００６９１２９
出版日期＝

目录
正文